Auszug aus "Sinus.NRW - Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht", Handreichung, Ritterbach Verlag, 2013, Seiten 45 bis 66

4 MAfiSuS – Mathematische Angebote für interessierte Schülerinnen und Schüler

Kommentierte Zusammenstellung motivierender mathematischer (Wettbewerbs-)Aufgaben und mathematisierender Kontexte zur Gestaltung von Angeboten im Ganztag und im Unterricht für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler.

Michael Rüsing

Teilnehmer des Projektes

Michael Rüsing (B.M.V.–Schule, Essen)
Thomas Giebisch (Leibniz-Gymnasium, Remscheid)
Gaby Heintz (ZfsL, Neuss)
Steffen Heyroth (Leibniz-Gymnasium, Essen)
Matthias Lippert (Röntgen-Gymnasium, Remscheid)
Ellen Voigt (Gymnasium Bayreuther Straße, Wuppertal)

4.1 Grundlagen des Projektes

MafiSuS (6674)

Individuelle Förderung bedeutet, alle Schülerinnen und Schüler entsprechend ihrer individuellen Bedürfnisse zu fördern. Im Sinne einer stärkenorientierten Förderung haben auch mathematisch besonders interessierte Schülerinnen und Schüler einen Anspruch auf eine ihren Bedürfnissen entsprechende Förderung. In diesem Projekt wurden Materialien zusammengestellt, die dies ermöglichen. Dabei sind sowohl Förderangebote im Rahmen von Angeboten im Nachmittagsbereich (sog. Arbeitsgemeinschaften) von (Ganztags-)Schulen als auch Förderangebote innerhalb des normalen Mathematikunterrichts mit einem besonderen Blick auf die gezielte Förderung leistungsstarker und interessierter Schülerinnen und Schüler ins Auge gefasst worden.

Um eine möglichst effektive und zielgerichtete Förderung mit einem Minimum an Recherche zu ermöglichen, wurde in diesem Projekt eine Auswahl existierender Materialien zusammengestellt, ergänzt und kommentiert. Die zusammengestellten Aufgaben sind in thematischen Einheiten zusammengefasst, so dass sie zielgerichtet und vertiefend auch parallel oder ergänzend zum Unterricht eingesetzt werden können. Durch die Kommentierung der Arbeitsmaterialien ist eine an dem individuellen Leistungsstand, der Begabung und Ausdauer der Schülerinnen und Schüler orientierte Auswahl von Aufgaben bzw. Hilfestellungen leicht möglich. Insbesondere kann zum Beispiel im Rahmen von Ganztagsangeboten auch ein Jahrgangsstufen übergreifender Einsatz erfolgen.

Die Bandbreite der Angebote, die in diesem Projekt zusammengestellt wurden, reicht von kommentierten Aufgaben aus Mathematik-Olympiaden über Anwendungskontexte bis hin zu praktisch erfahrbaren und dennoch leicht organisierbaren kleineren Projekten. Der Schwerpunkt der zusammengestellten Einheiten liegt auf der Doppeljahrgangsstufe 5/6. Darüber hinaus konnten aber auch Einheiten für die Jahrgangsstufen 7/8 entwickelt werden.

Die Arbeitsgruppe dieses SINUS-Projektes setzt sich aus Mitgliedern des Landesverbandes „Mathematikwettbewerbe NRW“ zusammen, der unter anderem die Landesrunde der Mathematikolympiade in Nordrhein-Westfalen ausrichtet. Ein besonderer Dank geht an den Verein „Mathematik-Olympiade“, der die Aufgaben der Olympiade entwickelt und die Erlaubnis gegeben hat, seine Aufgaben zu verwenden.

Im Folgenden werden zunächst die im Projekt gesammelten Erfahrungen zur Gestaltung eines Förderangebots vorgestellt. Anschließend werden aus den Materialien des Projektes mehrere Aufgaben- und Materialienbeispiele für verschiedene Phasen des Förderangebots dargestellt.

4.2 Gestaltung einer Fördersitzung im Rahmen einer AG

Bei Förderangeboten, die zum Beispiel im Rahmen einer AG regelmäßig in festen Zeitfenstern organisiert sind, bietet es sich an, jede AG-Sitzung klar zu strukturieren. Eine solche Struktur ermöglicht insbesondere jüngeren Schülerinnen und Schülern, sich im gesetzten Zeitrahmen zu orientieren. Bei den am Projekt beteiligten Kolleginnen und Kollegen hat sich für eine typische AG-Sitzung von 90 Minuten die folgende Struktur als vorteilhaft erwiesen:

i „Warm-up“ mit einer kurzen Denk- oder Knobelaufgabe, etwa 10 Minuten lang,
ii „Hauptteil“ mit thematischer Arbeit, praktisch oder theoretisch, etwa 60 Minuten lang,
iii „Ausklang“ mit mathematischen Spielen, etwa 20 Minuten lang.

Die Einteilung der AG-Sitzung in drei Phasen bietet den Vorteil, dass mit einer gemeinsamen, aktivierenden Knobel- oder Denkaufgabe ein deutlicher Startpunkt festgelegt wird. Der anschließende thematische Schwerpunkt kann in unterschiedlichen Arbeitsformen stattfinden und enthält ggf. auch einen Austausch über die Ergebnisse bzw. einen Bericht über Zwischenstände. In der dritten Phase führen unterschiedliche mathematische Spiele die Gruppe wieder zusammen und runden das Treffen ab.

Die angegebenen Zeitvorschläge können bei einer anderen AG-Dauer unter Beibehaltung der drei Phasen entsprechend angepasst werden. Da kreative Prozesse und problemlösendes Arbeiten allerdings teilweise viel Zeit in Anspruch nehmen, sollte der Zeitrahmen für eine Fördersitzung nicht unter 45 Minuten gewählt werden. Gute Erfahrungen wurden diesbezüglich mit den oben dargestellten 90 Minuten gemacht. Der Ablauf der drei Phasen wird im Folgenden an ausgewählten Beispielen und Materialien vorgestellt. Ergänzendes Material findet sich auf den Webseiten des SINUS-Projektes unter www.sinus.nrw.de.

www.sinus.nrw.de

Die nachfolgenden Ausführungen beziehen sich stets auf 90-minütige Einheiten.

4.3 Beispiele für die „Warm-up“-Phase

Diese erste Phase der Sitzung dient der Einstimmung der Schülerinnen und Schüler, die eventuell direkt aus der Mittagspause oder einem anderen Unterricht in die AG kommen. In dieser Phase soll mit Hilfe kleiner Aufgaben die Konzentration auf die mathematischen Inhalte gesteigert und eine gute Arbeitsatmosphäre erzeugt werden. In der Regel reicht hierzu eine Aufgabe pro AG-Sitzung aus, je nach Zusammensetzung der Gruppe sind jedoch in einigen Fällen auch zwei oder drei Aufgaben pro Sitzung empfehlenswert.

In der "Warm-up"Phase können Denk- und Knobelaufgaben eingesetzt werden. Gute Erfahrungen wurden in dieser Phase mit dem Einsatz von sogenannten „black stories“ gemacht, die im Moses-Verlag unter diesem Namen erschienen sind (http://www.moses-verlag.de/). Dabei handelt es sich zwar nicht direkt um mathematische Problemstellungen, zur Lösung ist jedoch logisches Denken und zielgerichtetes Fragen erforderlich. Auf der Vorderseite einer Spielkarte ist jeweils eine Situation geschildert, die von der Lehrkraft oder der Spielleitung (das kann auch ein/e Schüler/in sein) vorgelesen wird. Die Schülerinnen und Schüler versuchen gemeinsam im Plenum, die auf der Rückseite

black stories (6613)

Vorderseite einer Spielkarte mit der Situationsschilderung

Rückseite der Spielkarte mit der Entstehung der Situation

Abbildung 4.1: „black stories“-Spielkarte abgedruckten Umstände herauszufinden, die zu der Situation geführt haben. Dabei stellen die Schülerinnen und Schüler Fragen, die durch die Lehrkraft oder die Spielleitung immer nur mit „ja“ oder „nein“ beantwortet werden. Ein Beispiel hierzu zeigt die Abbildung 4.1.

Die „black stories“ sind in der „Warm-up“-Phase geeignet, da sie als Einstieg sehr gut Jahrgangs übergreifend mit allen gespielt werden können. Um den angestrebten Zeitrahmen der „Warm-up“-Phase nicht zu überschreiten, kann die Spielleitung, falls dies erforderlich ist, durch dezente Hinweise die Lösung der Situation beschleunigen. Darüber hinaus können „black stories“ auch als Ausklang am Ende einer Sitzung verwendet werden.

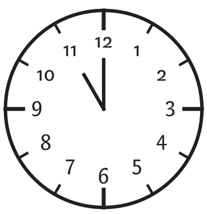
Knobelaufgaben

Natürlich können auch weitere leichte Denk- und Knobelaufgaben in der „Warm-up“-Phase eingesetzt werden. Hierfür gibt es eine Fülle von Aufgaben, die den Kolleginnen und Kollegen bekannt sein dürften. Da diese Aufgaben entweder individuell oder in kleinen Gruppen bearbeitet werden, muss hier insbesondere bei der Gruppe der mathematisch interessierten Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlich schnellen Bearbeitungen gerechnet werden. Diesem Umstand kann damit Rechnung getragen werden, dass die Schülerinnen und Schüler in dieser Phase zwei (oder drei) Aufgaben zur Verfügung gestellt bekommen, von denen sie eine auswählen und bearbeiten. Schnellere Schülerinnen und Schüler können dann eine zuvor nicht ausgewählte Aufgabe bearbeiten. Zum Ende der „Warm-up“-Phase können die Schülerinnen und Schüler in diesem Fall die Lösung ihrer Aufgabe(n) vorstellen und diskutieren, so dass die „Warm-up“-Phase mit einem Plenum in den Hauptteil übergeht. Falls es erforderlich ist, kann die Lehrkraft zum Ende der „Warm-up“-Phase auch ungelöste Knobelaufgaben auflösen.

Vier Aufgabenbeispiele für die „Warm-up“-Phase aus einer im Rahmen des Projektes entstandenen Sammlung sind hier aufgeführt. Die übrigen Aufgaben und die zugehörigen Lösungen sind im Internet auf der Seite www.sinus.nrw.de verfügbar.

Warm-up 10: Die Uhr, Folge I

Warm-up-Aufgaben (6607)



Zerlege die Uhr mit zwei geraden Schnitten so in drei Teile, dass sich beim Addieren der Zahlen in jedem Teil die gleichen Summen ergeben.

Auszug aus "Sinus.NRW - Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht", Handreichung, Ritterbach Verlag, 2013, Seiten 45 bis 66

Warm-up 16: Wochentage

Januar 2014

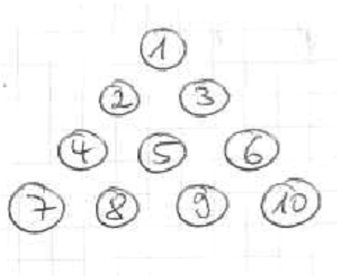
KW	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
1			1	2	3	4	5
2	6	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18	19
4	20	21	22	23	24	25	26
5	27	28	29	30	31		

Welcher Tag war vor 41 Tagen, wenn in 68 Tagen Mittwoch ist?

Warm-up 17: Das Zerteilen von Hufeisen

Wie kann man ein Hufeisen mit nur zwei Schnitten in sechs Teile teilen?

Warm-up 20: Das Dreieck steht Kopf



Kannst du das hier abgebildete Dreieck durch das Verschieben von drei Münzen auf den Kopf stellen?

Kreuzzahlrätsel

Ebenfalls geeignet für die Einstiegsphase sind Kreuzzahlrätsel. Dazu werden auf der SINUS-Homepage Beispiele mit umfangreichen Lösungshinweisen angeboten.

Kreuzzahlrätsel (6606)

4.4 Beispiele für den Hauptteil

Die Gestaltung des Hauptteiles einer AG-Sitzung kann sehr unterschiedlich ausfallen. So können im Hauptteil der Sitzung anspruchsvolle mathematische Aufgaben, Erkundungsprojekte oder auch Projekte mit handwerklichen praktischen Einheiten bearbeitet werden. Eine mögliche Vorgehensweise besteht darin, dass sich theoretische Module, wie Module auf Grundlage von Olympiade-Aufgaben, mit Modulen abwechseln, in denen handwerklich gearbeitet oder gezeichnet wird.

Die mathematischen Aufgaben, die im Rahmen dieses Projektes für den Hauptteil zusammengetragen wurden, sind im Wesentlichen in theoretische Module gegliedert, die aus Olympiade-Aufgaben bestehen, die um Hilfen und Anregungen ergänzt wurden. Zwei Beispiele hierfür werden im Folgenden vorgestellt. Neben diesen Aufgaben wurden in diesem Projekt auch kleinere Erkundungsprojekte entwickelt und Materialien für Einheiten mit praktischer Arbeit gesammelt. Alle Materialien zu dem Hauptteil einer AG-Sitzung wurden jeweils um ergänzende Hinweise für die Lehrkraft und ausformulierte Hilfestellungen für die Schülerinnen und Schüler erweitert.

Einheiten auf der Grundlage von Olympiade-Aufgaben

Für den Hauptteil einer Fördersitzung wurden Aufgaben aus verschiedenen Wettbewerbsjahren thematisch zusammengestellt und mit aufsteigendem Schwierigkeitsgrad zu Modulen zusammengefasst. Dabei ist ein Modul für den Hauptteil für einen Zeitbedarf von zwei bis drei 90-minütigen Sitzungen konzipiert. Die Module können, bis auf wenige Ausnahmen, die aufeinander aufbauen, in beliebiger Reihenfolge eingesetzt werden.

Bei einer Vorstellung der Materialien wurde von Teilnehmerinnen und Teilnehmern kontrovers diskutiert, ob Schüleraufgabenblätter nur aus dem Aufgabentext bestehen oder besser durch illustrierende Bilder angereichert werden sollen. Da die Meinungen hier weit auseinander gingen, wurde bei manchen Modulen eine angereicherte Version des Aufgabenblattes erarbeitet.
Zu jedem Modul gibt es

- Lehrermaterial mit
  - Lösungshinweisen
  - didaktischen Hilfestellungen
  - Differenzierungsmöglichkeiten
  - Weiterarbeitsmöglichkeiten
- Schüleraufgabenblatt
- Hilfsangebote für die Schülerinnen und Schüler

Beispielhaft sind hier Ausschnitte aus dem Modul „Wer ist wer“ und aus dem Modul „Winkel im Dreieck“ dargestellt.

4.4.1 Ausschnitte aus dem Modul „Wer ist wer?“

Das Modul „Wer ist wer?“ eignet sich besonders gut als Einstiegsmodul für eine Arbeitsgemeinschaft in der Klasse 5. Das Schüleraufgabenblatt zu diesem Modul, von dem hier die ersten zwei Seiten dargestellt werden, besteht insgesamt aus drei Seiten und umfasst sechs Aufgaben.

Das Lehrermaterial zu diesem Modul ist so umfangreich, dass auf den Seiten 53 bis 55 nur die Teile dokumentiert werden, die zu Aufgabe 2 gehören. Zu dieser Aufgabe gehört auch der als Schülerhilfe konzipierte Ausschneidebogen, der in Abbildung 4.2 auf Seite 54 abgedruckt ist.

Erste Seite des Schüleraufgabenblattes zum Modul „Wer ist wer?", Textversion

Mathematik-Olympiade e. V.
Materialien für die Klasse 5/6

Wer ist wer?

Aufgabe 1 (490513)

Fünf Jungen gründen eine Band „Die lauten Mathematiker". Der Name ist entstanden, weil alle an der Mathematik-Olympiade teilgenommen und die ersten fünf Plätze belegt haben. Die Jungen spielen Schlagzeug, Saxophon, Keyboard und Gitarre. Paul singt dazu.

(1) Für Stefan haben sich die Keyboardstunden gelohnt.
(2) Paul war traurig, dass er nicht Erster wurde.
(3) Nils ist nicht Erster, aber auch nicht Vierter geworden. Er spielt Schlagzeug.
(4) Timo ist Zweiter geworden, er spielt keine Gitarre.
(5) Guido freut sich auch über seinen fünften Platz.

a) Welche Plätze haben die Jungen jeweils bei der Mathematik-Olympiade belegt?

b) Wer hat in der Band welche Aufgabe?

Aufgabe 2 (480424)

Von den drei Kindern Andreas, Florian und Martin ist Folgendes bekannt:

(1) Florian hat eine grüne Hose, ein rotes T-Shirt und trägt keine Sandalen.
(2) Martin steht am weitesten von Florian entfernt und trägt eine blaue Hose.
(3) Ein Kind trägt Turnschuhe.
(4) Florian hat braune Haare. Du siehst ihn rechts.
(5) Das Kind mit dem gelben T-Shirt hat Gummistiefel an.
(6) Andreas trägt keine Turnschuhe und hat blonde Haare.
(7) Das Kind neben Andreas hat rote Haare und ein weißes T-Shirt.
(8) Der Junge mit der schwarzen Hose steht neben dem Jungen mit den Sandalen.

Wie sehen die drei Kinder aus? Wie stehen sie nebeneinander?

Zweite Seite des Schüleraufgabenblattes zum Modul „Wer ist wer?“, Bildversion

Aufgabe 3 (350623)

Herr **K**omisch, Herr **E**rnst und Herr **W**itzig treffen sich zum Skat.
Ihre Vornamen sind (möglicherweise in anderer Reihenfolge) **K**laus, **E**gon und **W**alter. Einer von ihnen trägt **k**einen Schlips, ein anderer einen **e**infarbigen und der dritte einen **w**itzigen Schlips. Nach dem Spiel steht fest:

(1) Der Gewinner der Skatrunde trägt einen **e**infarbigen Schlips.
(2) Herr **E**rnst saß noch nie vorher auf Herrn **K**omischs Sofa.
(3) **W**alter trägt **k**einen Schlips.
(4) Herr **K**omisch findet es komisch, dass er nicht gewonnen hat.
(5) **K**laus saß schon das vorige Mal auf Herrn **K**omischs Sofa.
(6) Herr **W**itzig trägt den **w**itzigen Schlips.

Stelle die Vor- und Familiennamen richtig zusammen.

Aufgabe 4 (430522)

Arndt, Bertram, Cecil und Dirk gehen in eine Schule, an der Arbeitsgemeinschaften in Mathematik, Schach, Turnen und Zeichnen angeboten werden. Jeder dieser Schüler hat sich für eine dieser Arbeitsgemeinschaften angemeldet, und zwar jeder für eine andere. Folgendes ist bekannt:

(1) Bertram wollte ursprünglich in die Schach-AG gehen, hat sich dann aber doch anders entschieden.
(2) Der „Turner“, der „Zeichner“ und Bertram haben denselben Schulweg.
(3) Der „Turner“ ist eine Leseratte und verschlingt zur Zeit die Bücher über Harry Potter.
(4) Cecil ärgert sich, dass er bei der Mathematik-Olympiade schlechter abgeschnitten hat als der „Turner“.
(5) Arndt wurde vom „Zeichner“ zum Geburtstag eingeladen.
(6) Weder Dirk noch der „Zeichner“ haben bisher ein Buch über Harry Potter gelesen, wollen dies jedoch schleunigst nachholen.

Auszug aus "Sinus.NRW - Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht", Handreichung, Ritterbach Verlag, 2013, Seiten 45 bis 66

a) Welche Arbeitsgemeinschaft besucht Bertram? Stelle dar, wie du deine Antwort aus den Angaben (1) bis (6) folgerst.

b) Untersuche, ob sich aus den Angaben (1) bis (6) auch klar und einsichtig ableiten lässt, welche Arbeitsgemeinschaften die anderen drei Jungen besuchen.

Lehrerhinweis zur Olympiade-Aufgabe 2 (480424)

Die Aufgabe sieht auf den ersten Blick sehr kompliziert aus wegen der vielen Merkmale, die zu berücksichtigen sind. Die Struktur der Aufgabe erweist sich dann aber doch als übersichtlich, da fast immer die Betrachtung zweier Merkmale ausreichend ist. Der erste Eindruck könnte die Schülerinnen und Schüler überfordern. Deshalb ist unten eine Zerlegung in Teilaufgaben vorgeschlagen.

Lehrerhinweis zum Einsatz gestufter Hilfen zu Aufgabe 2 (480424)

Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:

Falls für Schülerinnen und Schüler die Informationsfülle in der Aufgabenstellung zu komplex ist, lässt sich die Aufgabe leicht in Teilaufgaben zerlegen:

- Schreibe alle Merkmale auf.
- Welches Kind hat welche Hose an?
- Welches Kind hat welche Haarfarbe?

und so weiter.

Es sollte dann darauf geachtet werden, dass die Zuordnung von Namen und Schuhen erst am Ende verlangt wird, da hier in jedem Fall auf bereits erzielte Ergebnisse zurückgegriffen werden muss.

Als Hilfe können die Bilder aus dem Ausschneidebogen ausgeschnitten und den Schülerinnen und Schülern bei Bedarf angeboten werden. Damit kann die Aufgabe durch Legen von Bildern gelöst werden.

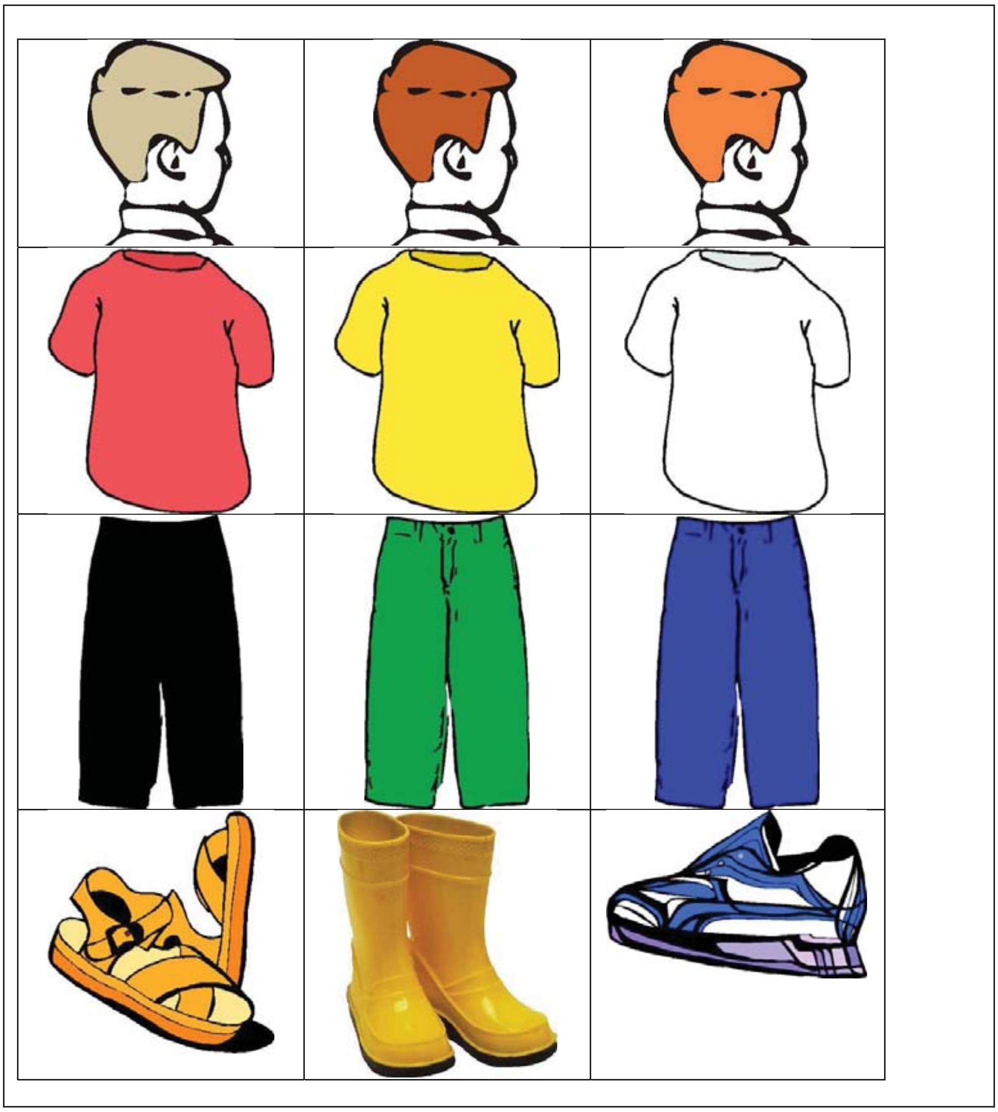


Abbildung 4.2: Schülerhilfe „Ausschneidebogen" zur Aufgabe 2 des Aufgabenblattes

Ausschnitt aus der ausführlichen Musterlösung zu Aufgabe 2

Lösungshinweis:

Es empfiehlt sich, zunächst die verschiedenen Merkmale mit ihren Ausprägungen aus der Aufgabenstellung systematisch aufzuschreiben:

Name:	Florian, Martin, Andreas
Haare:	braun, blond, rot
T-Shirt:	rot, gelb, weiß
Hose:	schwarz, grün, blau
Schuhe:	Sandalen, Gummistiefel, Turnschuhe
Position:	links, Mitte, rechts

Betrachte zunächst die Zuordnung von Name und Hose:

Aus (1) folgt:	Florian	–	grün
Aus (2) folgt:	Martin	–	blau
Damit muss gelten:	Andreas	–	schwarz

Betrachte die Zuordnung von Name und Haaren:

Aus (4) folgt:	Florian	–	braun
Aus (6) folgt:	Andreas	–	blond
Damit muss gelten:	Martin	–	rot

Ideen aus dem Lehrermaterial zur Weiterarbeit und Variation der Aufgabe 2

Mögliche Erweiterungen der Aufgabe:

Da die Information über die Schuhe von Andreas auf verschiedene Arten gewonnen werden kann, ist klar, dass die Aussagen der Aufgabenstellung redundant sind. Besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler können versuchen, die Zahl der Aussagen zu reduzieren, so dass die Aufgabe trotzdem noch lösbar bleibt.

Zusätzlich kann untersucht werden, was passieren würde, wenn man die Aussage (5) ersetzen würde durch

(5) Das Kind mit dem gelben T-Shirt hat Turnschuhe an.

Auszug aus "Sinus.NRW - Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht", Handreichung, Ritterbach Verlag, 2013, Seiten 45 bis 66

Das führt auf eine unlösbare Aufgabe. Aus der Herleitung, die – wie in den Lösungshinweisen – die Aussagen (1) und (8) benutzt, ergibt sich ein Widerspruch zu der Zuordnung, die aus der neuen Aussage (5) folgt.

An diese Überlegung anschließend kann geprüft werden, ob sich in der Originalaufgabe nicht weitere Widersprüche verbergen, die nicht entdeckt wurden. Diese lassen sich nur dadurch ausschließen, dass man die gefundene Lösung einer Probe unterzieht. Die Notwendigkeit einer Probe, die manchmal bei Aufgaben dieses Typs explizit gefordert wird, ist Schülerinnen und Schülern oft nicht klar.

4.4.2 Ausschnitte aus dem Modul „Winkel im Dreieck“

Material zur Doppeljahrgangstufe 7-8 (6660)

Das Modul „Winkel im Dreieck“ ist in der Doppeljahrgangsstufe 7/8 angesiedelt. Bei den Aufgaben zur Geometrie werden als eine spezielle Hilfe elektronische Arbeitsblätter eines dynamischen Geometriesystems angeboten. Diese Arbeitsblätter lassen sich einsetzen, um den Zusammenhang der in der Aufgabe gegebenen Größen im Zugmodus zu untersuchen und dadurch auf Vermutungen zu kommen. Der Beweis ist dann jeweils zusätzlich noch zu leisten. Für die Erstellung der Arbeitsblätter wurde das System DynaGeo verwendet. Wird an einer Schule ein anderes System benutzt, so lassen sich die Arbeitsblätter leicht darauf gestalten.

Das gesamte Modul umfasst sechs Aufgaben. Dokumentiert wird hier die Aufgabe 1. Zu dieser Aufgabe werden in der Materialsammlung im Internet ein Lösungsvorschlag, gestufte Hilfekarten und auch eine DynaGeo-Datei angeboten.

Aufgabe 1 aus dem Modul „Winkel im Dreieck“

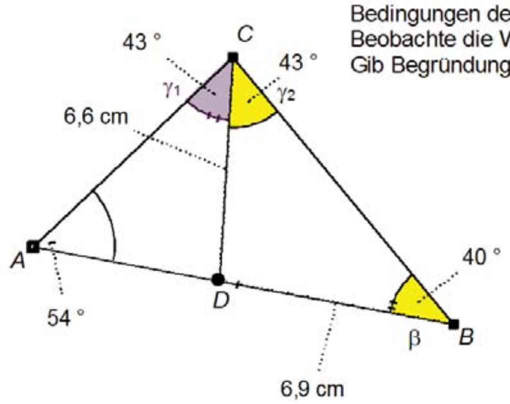
Aufgabe 1 (490713)

Über ein Dreieck ABC ist bekannt:

- i Die Größe des Winkels α beträgt 60°.
- ii Die Winkelhalbierende von γ schneidet die Seite AB so in einem Punkt D, dass die Strecken CD und BD gleich lang sind.

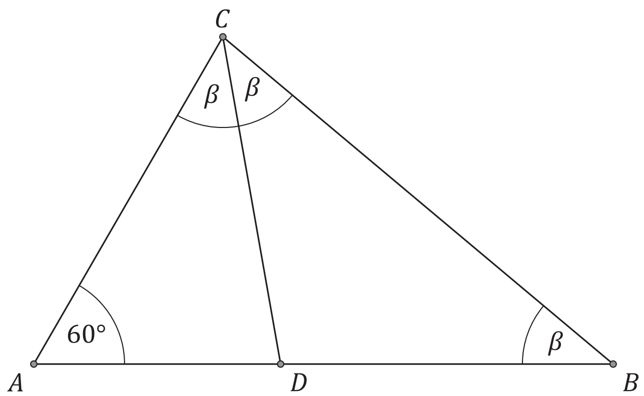
Stelle das Dreieck durch eine Skizze dar.
Bestimme die Größe der Winkel β und γ.

DynaGeo-Arbeitsblatt zur Aufgabe 1 (490713)



Ziehe an den Punkten B oder C, so dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.
Beobachte die Winkelgrößen dabei.
Gib Begründungen für deine Beobachtungen.

Lösungsvorschlag aus der Materialsammlung



In der Skizze ist das Teildreieck CDB als gleichschenklig zu identifizieren. Daraus ergibt sich, dass im Teildreieck CDB der Winkel bei C die Größe β hat.

Da CD Winkelhalbierende von γ ist, hat im Teildreieck ADC der Winkel bei C ebenfalls die Größe β.

Betrachtet wird die Winkelsumme im Dreieck ABC:

$$60° + \beta + 2 \cdot \beta = 180°$$

also $\beta = 40°$

und $\gamma = 2 \cdot \beta = 80°$

4.4.3 Ausschnitte aus dem Modul „Pop-up-Karten“

Da es in diesem Projekt um die Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler geht, die zum Beispiel in mathematischen Arbeitsgemeinschaften stattfindet, ist darauf zu achten, dass auch bei der praktischen Arbeit ein Bezug zur Mathematik erkennbar ist.

Pop-up Karten (6661)

Zu den Einheiten mit praktischen Arbeiten wurden im Rahmen dieses Projektes keine erklärenden Schülerarbeitsblätter, Arbeitsaufträge oder Materialien erstellt. Bei diesen Einheiten sollte die Lehrkraft Ziel, Arbeit und die Vorgehensweise erklären und vorführen. Der Bezug zur Mathematik kann in diesen Einheiten oft produktiv im Plenum diskutiert werden.

Dokumentiert wird hier ein Ausschnitt aus dem Modul zur Erstellung von fraktalen Pop-up-Karten. Eine solche Karte ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

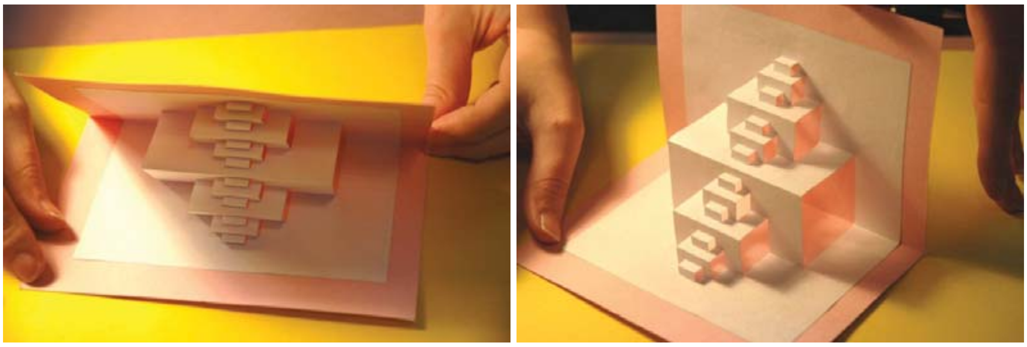


Abbildung 4.3: Aufklappen einer Pop-up-Karte, bei der eine fraktale Struktur erkennbar wird

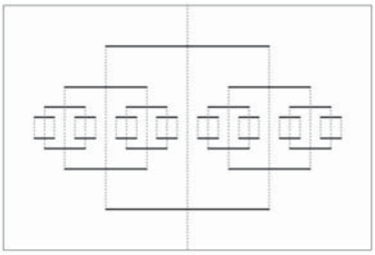
Erläuterung für den Leiter der AG zu Pop-up-Karten

Unter Pop-up-Karten versteht man Klappkarten, die beim Aufklappen ein räumliches Gebilde entfalten. Im Internet findet man unzählige Bastelanleitungen für solche Karten. Darunter sind auch solche, die mathematische Motive enthüllen. In dieser Einheit wird vorgeschlagen, Karten mit fraktalen Motiven zu gestalten. Neben der handwerklichen Betätigung kann man eine Reihe von mathematischen Tätigkeiten anschließen. Das beginnt bei der räumlichen Vorstellung, die insbesondere beim Knicken der Linien gefördert wird, und geht bis zur Mustererkennung, wenn darüber nachgedacht wird, aus welchen Teilen die Motive bestehen, wenn man immer feinere Strukturen herausarbeiten würde.

Die Schülerinnen und Schüler haben erfahrungsgemäß viel Freude beim Erstellen der Karten und fragen meistens nach weiteren Vorlagen, die sie zu Hause bearbeiten können.

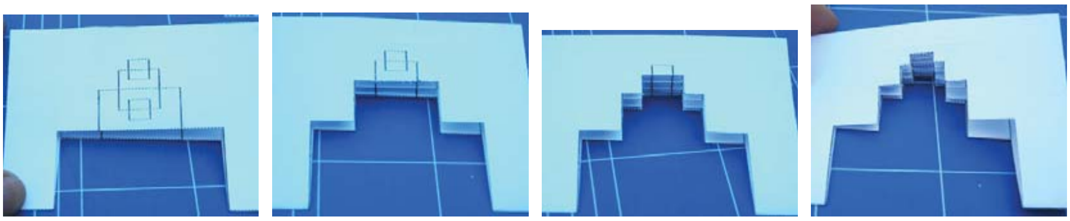
Benötigte Materialien

- Cuttermesser
- Lineal mit Stahlkante
- Schneidematte
- Klebestift
- Vorlagen für die Karteneinlagen (kopiert auf Papier)
- Zeichenkarton für die Karten
- Eventuell Buntstifte, wenn eine farbige Gestaltung gewünscht wird



In den Vorlagen gibt es durchgezogene und gestrichelte Linien. Entlang der durchgezogenen Linien muss mit einem scharfen Cuttermesser ein Schnitt gelegt werden. Die gestrichelten Linien sind Knicklinien. Es empfiehlt sich, diese Knicklinien leicht vorzuritzen. Das geht gut mit dem Rücken des Cuttermessers. Manche der Linien werden später nach innen, andere nach außen geknickt. Das Vorritzen sollte dann eigentlich immer auf der späteren Außenseite des Knicks erfolgen. Es reicht aber bei dünnem Papier, wenn ausschließlich auf der bedruckten Seite angeritzt wird.

Vorlagen finden sich in der Datei „Fraktale_Pop-Up-Karten_Vorlagen.docx“ usw. Insgesamt sind zur Zeit vier verschiedene Vorlagen verfügbar. Für Schülerinnen und Schüler, die nicht besonders geübt sind im Umgang mit Bastelmaterialien, stehen die Vorlagen „Vorlagen 1 Generationen.pdf“ zur Verfügung. Nach dem Schneiden und Ritzen wird die Figur gefaltet. Dabei empfiehlt es sich, stufenweise vorzugehen und nach jeder Stufe die Knicke fest anzudrücken. Nach dem Knicken wird die Figur in eine Karte aus Zeichenkarton passend eingeklebt.



Vorgehensweise in der Arbeitsgemeinschaft

Zunächst werden den Schülerinnen und Schülern einige Pop-up-Karten vorgeführt. Das weckt bei den meisten bereits den Wunsch, so etwas selber herzustellen.

Bevor das Material ausgeteilt wird, sollten Sicherheitshinweise zum Umgang mit dem Cuttermesser gegeben werden. Als weitere Erklärung ist wirklich nur notwendig, auf die beiden unterschiedlichen Arten von Linien hinzuweisen.

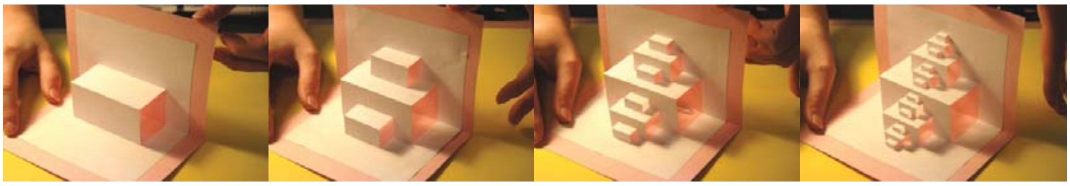
Das richtige Knicken macht den Schülerinnen und Schülern größere Schwierigkeiten. Insbesondere kommt es häufig vor, dass sie zunächst auf allen Stufen bis an den Rand knicken, so dass später in der Figur auf eigentlich glatten Teilen unschöne Knicke entstehen. Daher muss der Lehrer oder die Lehrerin beim Knicken helfen bzw. die ersten Knicke vormachen. Da die Schülerinnen und Schüler unterschiedlich schnell mit den Vorarbeiten fertig werden, geschieht diese Hilfe am besten in kleinen Gruppen. Außerdem ist diese Hilfe im Plenum nur schlecht von allen zu sehen.

Das Einkleben in die Kartonkarte ist dann wieder problemlos.

Es kommt immer wieder vor, dass einzelne Schülerinnen und Schüler sich verschneiden. Daher sollten ausreichend viele Vorlagen in Reserve gehalten werden.

Hinweise zum mathematischen Gehalt und zu möglichen Fortführungen

Man kann nun darauf hinweisen, dass die Figur in mehreren Stufen (Generationen) entsteht. Dabei bieten vorbereitete Karten, die die einzelnen Entstehungsstufen zeigen, eine Hilfe. Dafür stehen die Vorlagen in der Datei „Vorlagen 1 Generationen.pdf" zur Verfügung.



An den Figuren kann direkt gezählt werden:

- Wie viele Stufen gibt es in den einzelnen Generationen?
- Wie viele Stufen sind von Generation zu Generation hinzugekommen?
- Wie viele Schnitte sind bei jeder Generation erforderlich?
- Wie viele Knicklinien sind bei jeder Generation erforderlich?
- Wie sehen die Zahlen bei der 10. Generation aus, wie bei der 100.?

Durch Rechnung können weitere Fragen betrachtet werden, die insbesondere die leistungsstärksten Schülerinnen und Schüler herausfordern:

- Wie groß ist die Papierfläche, die auf die Karte geklebt wird, in jeder Generation?
- Wie groß ist das Volumen unter der Treppe in jeder Generation?

4.5 Beispiel für den Ausklang

Es gibt viele mathematische Spiele, die als Ausklang einer AG-Sitzung geeignet sind. In der Weihnachtszeit können in dieser Phase auch Aufgaben aus dem jedes Jahr im Internet verfügbaren „mathematischen Adventskalender" verwendet werden. Weitere Spiele und Informationen sind in der Materialdatenbank des Projektes unter www.sinus.nrw.de zu finden. Hier ist beispielhaft das weniger bekannte „Autorennen auf Papier" dokumentiert.

Autorennen (6662)

Auszug aus "Sinus.NRW - Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht", Handreichung, Ritterbach Verlag, 2013, Seiten 45 bis 66

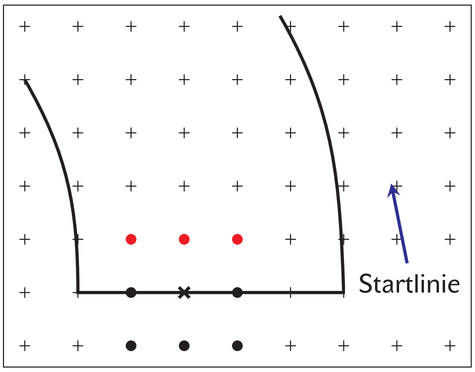
Autorennen auf Papier

Regeln

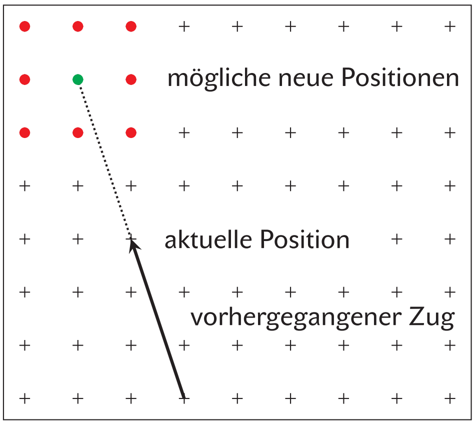
Das Spiel kann alleine oder mit mehreren Spielern gespielt werden. Zunächst werden auf kariertem Papier eine Rennstrecke, eine Startlinie und eine Ziellinie gezeichnet. Für jeden Mitspieler wird auf der Startlinie die Position seines Autos eingetragen.

In jeder Spielrunde besetzt jeder Mitspieler eine neue Position. Der Zug auf die neue Position wird durch einen Pfeil dargestellt. Die Ermittlung der neuen Position ist davon abhängig, ob das Auto steht oder fährt. Stets sind neun Punkte als neue Position möglich. Zur besseren Übersichtlichkeit ist hier nur die Fahrt eines Autos dargestellt.

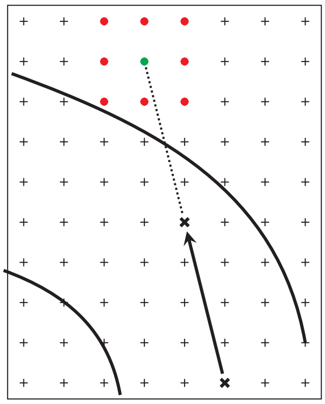
Bei **stehendem Auto** ist jeder der acht Gitterpunkte, die um die Position des Autos, gekennzeichnet mit x, herum liegen, eine mögliche neue Position. Das Auto könnte auch an seiner Position stehen bleiben, was aber in der Regel nicht sinnvoll sein wird. Beim Start wird es nur sinnvoll sein, einen der drei vor dem Auto befindlichen Gitterpunkte (rot) anzusteuern. Jeder Zug wird durch einen Pfeil dargestellt.



Bei **fahrendem Auto** muss von der aktuellen Position aus zunächst der vorhergegangene Zug gedanklich durchgeführt werden (gestrichelte Linie). Der dadurch erreichte Punkt (grün) und die acht Nachbarpunkte (rot) sind die möglichen neun Zielpunkte des nächsten Zuges. Sollte einer dieser Punkte bereits von einem anderen Auto besetzt sein, darf er nicht gewählt werden.

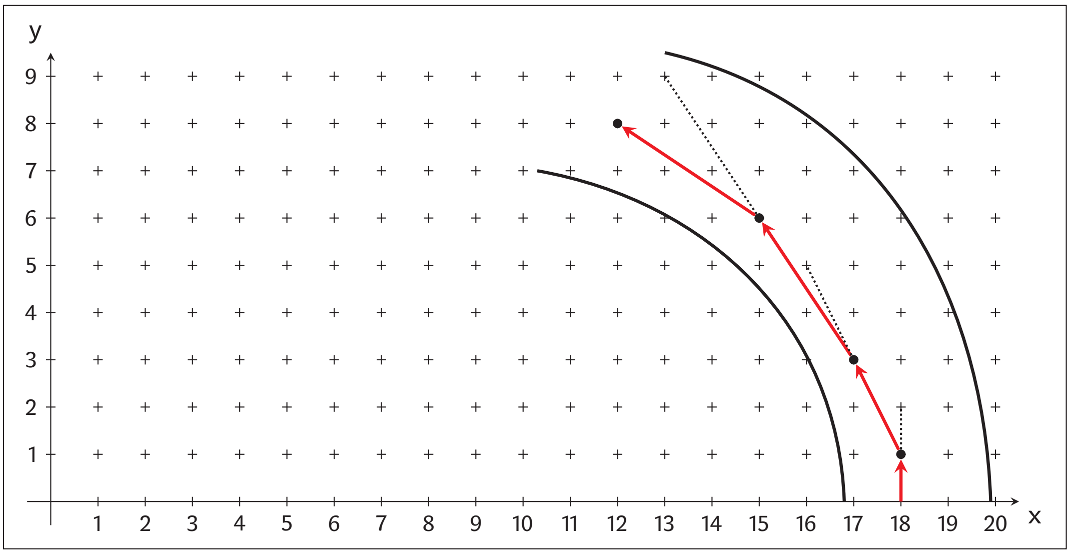


Auszug aus "Sinus.NRW - Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht", Handreichung, Ritterbach Verlag, 2013, Seiten 45 bis 66



Wer nur noch einen Gitterpunkt außerhalb der Strecke ansteuern kann, z. B. weil das Auto zu schnell auf eine Kurve zugefahren ist, **scheidet aus**.

Beispiel der ersten Züge einer Fahrt



Vom Startpunkt (18/0) kann einer der Punkte (17/1), (18/1) oder (19/1) angesteuert werden. Das Auto fährt im Beispiel jedoch von der Startlinie geradeaus los und erreicht deshalb (18/1) als neue Position. Würde das Auto nun unverändert weiterfahren, würde es zur Position (18/2) gelangen. Der Fahrer beschleunigt jedoch und lenkt nach links. Daher wird die Position (17/3) erreicht. Prinzipiell wären auch die Positionen (18/3), (19/3), (17/2), (18/2), (19/2), (17/1), (17/2) oder (17/3) möglich gewesen. Würde das Auto nun unverändert weiterfahren, würde es zur Position (16/5) gelangen. Der Fahrer beschleunigt jedoch noch mehr und lenkt etwas nach links. Dadurch wird die Position (15/6) erreicht. Prinzipiell wären auch die Positionen (16/6), (17/6), (15/5), (16/5), (17/5), (15/4), (16/4) oder (17/4) möglich gewesen.

4.6 Modellhafte Reihenplanung für ein Halbjahr in Klasse 5

Beispielhaft wurde eine mögliche Reihenfolge für das Einstiegshalbjahr in der Klasse 5 für das erste Halbjahr des Schuljahres 2013/2014 erstellt. Es handelt sich um einen Vorschlag, der beliebig abgeändert werden kann. Viele Materialien aus der Übersicht sind mit Erläuterungen in der Materialdatenbank des Projektes zu finden.

MafiSuS (6674)

KW	Datum	Warm up	Hauptteil	Ausklang
37	09.09. – 13.09.2013	Kirschtorte	Informationen zur **Mathematik-Olympiade**, ausgewählte Aufgaben *Motivation zur Teilnahme, Wettbewerb steht unmittelbar bevor*	Black Story
38	16.09. – 20.09.	Tanzsaal	Modul „Wer ist wer?“	Black Story
39	23.09. – 27.09.	Lügengeschichten	Modul „Wer ist wer?“	Nim-Spiel
40	30.09. – 04.10.	Leitungsbau	Projekt „Schrägbilder“	Nim-Spiel
41	07.10. – 11.10.	Gleisarbeiten	Projekt „Schrägbilder“	100 gewinnt
42	14.10. – 18.10.	Schwimmbecken	Modul „Probleme an der Waage“	Kreuzzahlrätsel
43	Herbstferien			
44	Herbstferien			
45	04.11. – 08.11.	Nüsse	Bastelprojekt „Pop-up Karten“ / Training für 2. Runde der MO *Als Motivation für die Mustererkennung nutzbar*	Autorennen
46	11.11. – 15.11.	Geschwister	Bastelprojekt „Pop-up Karten“	Autorennen
47	18.11. – 22.11.	Wasserkrüge	Modul „Mustererkennung“	Fünf in einer Reihe
48	25.11. – 29.11.	Die Uhr	Modul „Mustererkennung“ *Hinweis auf mathematische Adventskalender*	Fünf in einer Reihe
49	02.12. – 06.12.	Wochentage	Bastelprojekt „Fröbelsterne“ *passend zur Vorweihnachtszeit*	Adventskalender
50	09.12. – 13.12.	Hufeisen zerteilen		Adventskalender
51	16.12. – 20.12.	Der Diebstahl der Edelsteine	Modul „Kryptogramme“	Kreuzzahlrätsel in Weihnachts-baumform
52	Weihnachtsferien			
1	Weihnachtsferien			
2	08.01. – 10.01.2014	Der Treffpunkt	Modul „Kryptogramme“	Black Story
3	13.01. – 17.01.	Das Dreieck steht kopf	Informationen zum **Känguru-Wettbewerb,** ausgewählte Aufgaben *Motivation zur Teilnahme, Anmeldung steht unmittelbar bevor*	Kreuzzahlrätsel
4	20.01. – 24.01.	Ein Rechenrätsel	Modul „Rund um den Kreis“	Autorennen
5	27.01. – 31.01.	Schachproblem 1	Modul „Rund um den Kreis“	Groschenspiel
6	03.02. – 07.02.	Schachproblem 2	Modul „Rund um den Kreis“	Nur kein Rechteck

4.7 Übersicht über Module auf der Grundlage von Olympiade-Aufgaben

Doppeljahrgang	Oberthema	Thema
Klasse 5/6	Geometrie	Rund um den Kreis 5/6
		Zerlegung von Flächen
	Verborgene Zahlen	Experimentieren, Beobachten, Argumentieren
		Kryptogramme
		Rechenaufgaben
		Zahlenrätsel
	Wer ist wer?	
	Knobeln mit der Waage	
	Teilbarkeit	
	Mustererkennung	
	Systematisches Probieren	
	Kombinatorisches Zählen	
Klasse 7/8	Geometrie	Rund um den Kreis 7/8
		Winkel im Dreieck
		Kongruenz und Symmetrie
	Systematisches Probieren	

Dabei sind die grau unterlegten Module fertig (Stand Juni 2013)

4.8 Literaturliste

Holzamer, Peter (1994). *Kreuzzahlenrätsel und Zahlenknobeleien*. Frankfurt: Harri Deutsch.

König, Helmut (1996). *Arbeitsgemeinschaften Klasse 5 – eine Anleitung für AG-Leiter*. Chemnitz: Bezirkskomitee.

Mathematikolympiaden e.V., Hrsg. (1996). *Die 35. Mathematik-Olympiade 1995/96*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e.V., Hrsg. (1997). *Die 36. Mathematik-Olympiade 1996/97*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e.V., Hrsg. (1998). *Die 37. Mathematik-Olympiade 1997/98*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e.V., Hrsg. (1999). *Die 38. Mathematik-Olympiade 1998/99*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e.V., Hrsg. (2000). *Die 39. Mathematik-Olympiade 1999/2000*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e.V., Hrsg. (2001). *Die 40. Mathematik-Olympiade 2000/2001*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2002). *Die 41. Mathematik-Olympiade 2001/2002*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2003). *Die 42. Mathematik-Olympiade 2002/2003*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2004). *Die 43. Mathematik-Olympiade 2003/2004*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2005). *Die 44. Mathematik-Olympiade 2004/2005*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2006). *Die 45. Mathematik-Olympiade 2005/2006*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2007). *Die 46. Mathematik-Olympiade 2006/2007*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2008). *Die 47. Mathematik-Olympiade 2007/2008*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2009). *Die 48. Mathematik-Olympiade 2008/2009*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2010). *Die 49. Mathematik-Olympiade 2009/2010*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2011). *Die 50. Mathematik-Olympiade 2010/2011*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2012). *Die 51. Mathematik-Olympiade 2011/2012*. Hamburg: Herues.

Uribe, Diego (1993). *Fractal Cuts – Exploring the magic of fractal with pop-up designs*. Norfolk: Traquin Publications.