Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht

Materialien und Anregungen zur Unterrichtsentwicklung – Berichte aus den SINUS.NRW Projekten

November 2013

Ministerium für Schule und Weiterbildung

Herausgegeben vom
Ministerium für Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen
Völklinger Straße 49, 40221 Düsseldorf
Telefon 0211-5867-40
Telefax 0211-5867-3220
poststelle@schulministerium.nrw.de
www.schulministerium.nrw.de
www.standardsicherung.nrw.de
Heft 9050/1
1. Auflage 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht – ein Perspektivenwechsel

Dr. Georg Trendel, Dr. Joachim Roß

Die vorliegende Broschüre fasst Projektergebnisse zusammen, die in der vierten Phase des Projekts SINUS.NRW bis Mitte 2013 entstanden sind. In den Artikeln der Teilprojekte werden zunächst die zugrunde liegenden Ideen und Konzeptionen erläutert und anschließend an einzelnen Beispielen illustriert. Eine Darstellung aller insgesamt erstellten Materialien würde den Rahmen dieser Veröffentlichung sprengen. Allerdings lassen sie sich unter den in den Beiträgen angegebenen Links online ansehen und herunterladen.[1]

Ziel der SINUS-Projekte in den verschiedenen Phasen des Programms war es, zur Qualitätsverbesserung des mathematischen Unterrichts beizutragen. Dazu wurden jeweils Bereiche identifiziert, in denen der Entwicklungsbedarf besonders hoch erschien. Seit dem Jahr 2004 gelten für das Fach Mathematik in der Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen kompetenzorientierte Kernlehrpläne. Der Schwerpunkt der letzten SINUS-Phase bestand darin, Materialien und weitergehende Ansätze für eine kompetenzorientierte Unterrichtsentwicklung zu erproben. Im Folgenden soll daher zunächst dargestellt werden, wie wir Kompetenzorientierung verstehen und umzusetzen versuchen. Mit Bezug auf diesen Rahmen lassen sich unterschiedliche Projekte als Mosaiksteine einordnen, die jeweils für sich einen wesentlichen Aspekt der Gesamtkonzeption abbilden.

www.sinus.nrw.de
(6626)

Kompetenz – alter Wein in neuen Schläuchen?

Bildungsstandards und Kernlehrpläne verwenden einen Kompetenzbegriff, der von F. E. Weinert formuliert wurde und sich ausdrücklich auf Wissen und Können in einer bestimmten Domäne bezieht. Nicht ganz unproblematisch ist, dass dieser Kompetenzbegriff oft mit konkurrierenden Begriffen verwechselt oder vermischt wird, die gerade die inhaltsunabhängigen personalen Fähigkeiten in den Vordergrund stellen. Kompetenzen sind

> … die bei Individuen verfügbaren oder von ihnen erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, bestimmte Probleme zu lösen,
> sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften

[1] Ergänzende Informationen, Materialien und Erfahrungsberichte stehen auf der Internetseite www.sinus.nrw.de bereit. Die unter den QR-Codes angegebenen Nummern beziehen sich auf einzelne Elemente, mit denen diese innerhalb der SINUS-Internetseiten gefunden werden können.

> und Fähigkeiten, die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können. (Weinert 2001)

Kompetent ist demnach eine Person, die einerseits über Wissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten verfügt, andererseits den Willen, die Motivation und die Bereitschaft zeigt, diese auch anzuwenden und einzubringen. Kompetenzorientierung beschreibt im fachlichen Bereich damit die Anforderung, Lernende in die Lage zu versetzen, mit dem Gelernten in persönlichen und in gesellschaftlichen Zusammenhängen etwas anfangen zu können und zu wollen. Kompetenzorientierung als didaktisches Prinzip erfordert dann, die Lernprozesse so zu planen und zu gestalten, dass Kompetenzen von allen Lernenden möglichst weit entwickelt werden können.

Kernlehrpläne der neueren Generation sind Ausdruck eines Paradigmenwechsels in der Steuerungsphilosophie unseres Bildungssystems. Statt im Detail vorzuschreiben, was in einem bestimmten Fach durchzunehmen ist (*Input*), wird angegeben, welches Wissen und Können Lernende am Ende eines bestimmten Bildungsabschnitts in der Regel besitzen sollen (*Output* oder *Outcome*). Man könnte sich nun zu Recht fragen, warum eine solche Veränderung der Steuerungsphilosophie Lehrpersonen überhaupt tangieren sollte. Guter Unterricht orientierte sich auch schon früher daran, Schülerinnen und Schülern nachhaltig etwas beizubringen, was sie auch nutzen können. Auch die Inhalte haben sich nicht grundlegend verändert. Und warum sollte die bisher propagierte Lernzielorientierung auf einmal durch etwas anderes abgelöst werden?

In den SINUS-Projekten wird Kompetenzorientierung nicht als Alternative zur Lernzielorientierung der Vergangenheit, sondern als konsequente Fortführung eines unvollendet gebliebenen Ansatzes gesehen. Standards und Kernlehrpläne präzisieren normativ vorgegebene Bildungsziele der Mathematik und operationalisieren sie über eine Differenzierung nach Kompetenzbereichen, über eine genauere Beschreibung dieser Kompetenzbereiche bis hin zur relativ konkreten Beschreibung von inhaltlichen Zielen. Insofern liefern die neuen Kernlehrpläne gegenüber den früheren Vorgaben weitaus genauere Kriterien, welche Ziele wichtig und welche weniger wichtig sein können, und stellen deshalb eine wertvolle Hilfe zur Unterrichtsplanung dar. Vor allem aber richtet Kompetenzorientierung weitaus deutlicher als früher den Fokus auf die Lernenden als Individuen; eine Veränderung der Blickrichtung, die dann doch zu bedeutsamen Konsequenzen führt.

Kompetenzorientierung als Perspektivenwechsel

Kompetenzen sind keine Unterrichtsinhalte nach dem Motto „Durchnehmen und Abhaken“. Sie sind im Gegenteil Eigenschaften bzw. Dispositionen von individuellen Schülerinnen und Schülern. Kompetenzen entwickeln sich also für jede Person in einer besonderen Weise und müssen dementsprechend auch personenbezogen gefördert werden. Kompetenzorientierung erfordert in dieser Hinsicht einen Perspektivenwechsel. Er besteht darin, das Können und das Lernen Einzelner verstärkt zu beachten und sich in den Unterrichtsangeboten nicht nur, wie bisher zu oft geschehen, nach einem fiktiven Durchschnittsschüler zu richten, sondern gerade auch in den Randbereichen den schwachen und den besonders starken Lernern gerecht zu werden. Er beinhaltet auch den Abschied von der Illusion, man könne oder solle möglichst alle Lernenden auf einen gleichen Stand bringen. Optimale

Förderung jedes Einzelnen dürfte dazu führen, dass schwächere ebenso wie stärkere Lerner ein höheres Niveau erreichen, aber notwendigerweise und gewollt auch dazu, dass auf diesem höheren Level die Schere zwischen den Randbereichen tendenziell weiter aufgeht.

Differenzierende Angebote für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler innerhalb des Fachunterrichts bzw. als Angebot im (offenen) Ganztag sind im Kapitel 4: „MAfiSuS – Mathematische Angebote für interessierte Schülerinnen und Schüler" beschrieben. Dort finden sich Angebote, mit denen auch Kompetenzen abseits der in den Kernlehrplänen formulierten inhaltlichen Ziele angesprochen werden. Der Erwerb prozessbezogener mathematischer Kompetenzen und das Vernetzen inhaltlicher Kompetenzen aus verschiedenen Jahrgangsstufen nehmen in diesem Projekt einen großen Stellenwert ein.

Der beschriebene Perspektivenwechsel berührt darüber hinaus auch inhaltlich-fachliche Bereiche. Das sich in den Bildungszielen ausdrückende Menschenbild beinhaltet als wesentliches Moment den Gedanken der Teilhabe. Teilhabe bedeutet Orientierung in einer zunehmend durch Wissenschaft und Technik geprägten Welt, ein Verständnis der sich dabei ergebenden Probleme und entsprechender Lösungsvorschläge, Autonomie bei Entscheidungen als Verbraucher sowie Partizipation an gesellschaftlichen Diskussionen und Entscheidungen mit mathematischem oder naturwissenschaftlich-technischem Hintergrund. Die dazu erforderlichen Fähigkeiten und Kenntnisse müssen in der Schule erworben werden. Dazu gehören ein vertieftes Verständnis wesentlicher fachlicher Konzepte ebenso wie Einsichten darin, wie im Alltag mithilfe mathematischer Ansätze eine objektivierte Beurteilung von Situationen erfolgen kann. Das Anwenden und Beurteilen mathematischer Grundideen und Methoden, das rationale Argumentieren mit Fakten und Modellen, das bewusste Entscheiden nach Abwägen von Kriterien lernt man jedoch nicht so nebenbei, sondern es muss explizit thematisiert und auf einer Metaebene reflektiert werden.

Das „Spiralcurriculum Stochastik Sekundarstufe I" in Kapitel 6 stellt eine Möglichkeit zu einer wachsenden Kompetenz aus dem Blickwinkel der Stochastik dar. Die Projektgruppe Brauner et al. liefert ein stochastisches Konzept, das sich spiralig wiederkehrend und vertiefend durch die gesamte Sekundarstufe I hindurchzieht.

Die Mitglieder der SINUS-Projekte erwarten darüber hinaus, dass ein kognitiv aktivierender und kompetenzfördernder Unterricht sich nicht nur in besseren Ergebnissen ausdrückt, sondern auch Interesse und Motivation positiv beeinflusst („Weinert hinter dem Komma"). Junge Menschen denken gerne und wollen verstehen, jedenfalls wenn sie es als sinnvoll erleben. Die empirisch sehr gut bestätigte Selbstbestimmungstheorie (von Deci und Ryan 1993) zeigt, dass für die Entstehung von intrinsischer Motivation drei Grundbedürfnisse des Menschen ausschlaggebend sind:

- Kompetenzerleben: Man möchte erkennen, dass man durch eigenes Wissen und Können Herausforderungen bewältigen kann.
- Autonomie: Man möchte selbst entscheiden können und nicht nur in fremdem Interesse auf fremde Anweisungen hin handeln.
- Eingebunden-Sein: Man möchte ein anerkanntes Mitglied einer Gemeinschaft sein und in dieser gemeinsame Ziele verfolgen.

Klar formulierte Kompetenzziele schaffen Transparenz. Sie erlauben es, die vorhandenen Kompetenzen einzuschätzen und realistische, weitergehende Ziele ins Auge zu fassen. Bedeutsam ist dabei auch eine Form von Feedback, die schon vorhandene Fähigkeiten herausstellt und ermuntert, darauf aufzubauen, anstatt vorliegende Defizite zu beklagen.

Aspekte eines motivierenden Mathematikunterrichts werden in dem Kapitel 2: „Steigerung der Motivation im Mathematikunterricht" genauer dargestellt. In diesem Projekt sind mithilfe der Analyse videographierter Unterrichtssequenzen in der Sekundarstufe II Kriterien erarbeitet worden, die eine Steigerung der Motivation der am Lernprozess teilnehmenden Schülerinnen und Schüler begünstigen.

Elemente kompetenzorientierten Unterrichts in Mathematik

Kompetenzorientierter Unterricht verlangt nach Differenzierung, ist aber kein Einzelunterricht. Das mit Abstand wichtigste Element von Kompetenzorientierung ist das bewusste Setzen begründeter, klarer und transparenter Ziele. Dies gelingt nur, wenn Lehrpersonen differenziert einschätzen können, auf welchem Stand bezüglich dieser Zielsetzungen sich ihre Schülerinnen und Schüler befinden und bis wohin man sie mit realistischem Aufwand bringen kann. Erst auf dieser Basis können Lernprozesse angemessen geplant und organisiert werden. Die Verwendung von Unterrichtsmethoden darf dabei kein Selbstzweck sein, sondern muss Lernprozesse unterstützen und sich an den Zielen orientieren. Dabei können Unterrichtsformen in der Bandbreite von extrem eng geführtem, lehrerzentriertem bis hin zu sehr offenem, selbstgesteuertem Lernen das Mittel der Wahl sein.

Wenn Kompetenz die Fähigkeit bedeutet, in unterschiedlichen schulischen und außerschulischen Kontexten Probleme zu lösen, so muss ein Ziel darin bestehen, Schülerinnen und Schüler zu immer selbstständigerem, selbstgesteuertem Arbeiten zu befähigen. Steuerungs- und Strukturierungsfunktionen sollten also allmählich und behutsam von den Lehrenden auf die Lernenden übertragen werden. Auch die Anforderungen, die sich aus der Heterogenität der Lerngruppen ergeben, lassen einen durchgängig lehrerdominierten Unterricht wenig sinnvoll erscheinen. Lehrpersonen benötigen Freiräume, um sich um unterschiedliche Schülergruppen differenziert kümmern zu können. Es erscheint also unumgänglich, in gewissen Grenzen eine personale Steuerung des Unterrichts durch eine materiale zu ersetzen. In materialgesteuerten Lernumgebungen sind Lernprozesse durch Lernaufgaben und zugehörige Arbeitsmaterialien so vorstrukturiert, dass Schülerinnen und Schüler auf verschiedenen Niveaus weitgehend selbstständig arbeiten können. Gute materialgebundene Lernumgebungen entlasten mittelfristig die Lehrpersonen vom Aufwand zur Unterrichtsvorbereitung, auch durch Austausch mit Kollegen, und bieten langfristig durch kontinuierliches Einarbeiten von Erfahrungen und Feinarbeiten an Details die Chance zu einer stetigen Verbesserung der Unterrichtsqualität sowie der Lernergebnisse.

Im Kapitel 3: „Individuelle Förderung im Mathematikunterricht: So geht's" werden unterschiedliche Aspekte in den Fokus genommen, die den individuellen Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler beeinflussen. In Kooperation mit der Universität Bielefeld wurde ein Diagnosewerkzeug für den Beginn der 5. und 7. Jahrgangsstufe entwickelt, mit dem sich die Lehrkraft einen Überblick über Stär-

ken und Schwächen von Schülergruppen bzw. einzelner Schülerinnen und Schüler verschaffen kann. Daneben wurden auf Grundlage der Kernlehrpläne an Basiskompetenzen orientierte Selbsteinschätzungsbögen und Selbstüberprüfungsbögen entwickelt, die, konzeptionell sinnvoll eingebunden, eine zunehmende Eigenverantwortlichkeit der Schülerinnen und Schülern fördern. Die dritte Säule dieses Projektes war das Entwickeln von Blütenaufgaben, die Möglichkeiten zur individuellen Förderung im Mathematikunterricht darstellt.

Ein wichtiger und unverzichtbarer Schritt für jeden Lernprozess besteht im Festigen und Üben von Gelerntem. Sicherheit und Flüssigkeit in der Anwendung von Konzepten und Methoden sind erforderlich, um das Arbeitsgedächtnis zu entlasten und sich ganz auf Neues, Interessantes und Unbekanntes konzentrieren zu können.

Dass im Mathematikunterricht das wiederholte Trainieren durch „Plantagenaufgaben" nicht zielführend ist, wird inzwischen von vielen Lehrkräften akzeptiert. Intelligente Übungen und unterschiedliche Konzepte dazu werden in dem Artikel 5: „Sinnvolles Üben im Mathematikunterricht" erstellt und zusammengefasst.

Die Beiträge in diesem Buch dokumentierten vor allem materialgebundene Vorgehensweisen. Das bedeutet nicht, dass stärker personengesteuerte Phasen des Unterrichtens, bei denen Erklärungen und adhoc-Arbeitsanweisungen der Lehrperson im Vordergrund stehen, gering geschätzt werden. Sie werden ihre unverzichtbare Bedeutung in bestimmten Abschnitten des Lernens behalten, der Fokus dieses Buches liegt jedoch auf den bisher weniger verbreiteten Vorgehensweisen. Die Autoren würden sich freuen, wenn sie Interesse daran wecken könnten, die verschiedenen Wege im eigenen Unterricht zu testen und eigene Erfahrungen damit zu sammeln.

Literaturliste

Deci, Edward und Richard Ryan (1993). „Die Selbstbestimmung der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik". In: *Zeitschrift für Pädagogik*. 39. Ser. 39.2, S. 223–238.

Weinert, F. E. (2001). „Leistungsmessungen in Schulen." In: Hrsg. von F. E. Weinert. Weinheim: Beltz. Kap. Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. S. 17–32.

2 Ansätze und Materialien zur Steigerung der Motivation im Mathematikunterricht zu Beginn der Oberstufe

Ulrich Hoffert

2.1 Vorbemerkungen

Steigerung der Motivation im Mathematikunterricht (6685)

Der Schritt aus der Sekundarstufe I hinein in die Einführungsphase der Oberstufe ist für viele Schülerinnen und Schüler im Fach Mathematik nicht problemlos. Mathematik ist als Pflichtfach nicht abwählbar. Dies führt bei einigen Schülerinnen und Schülern in dem von ihnen ungeliebten Fach Mathematik zu Lustlosigkeit und Frustration bis hin zur Lern- und Arbeitsverweigerung. Kommen fachliche Defizite, die bereits in der Sekundarstufe I entstanden sind, hinzu, dann verschärft sich die Situation der Betroffenen noch einmal. Mit dieser Problematik haben sich Kolleginnen und Kollegen aus Gymnasien und Gesamtschulen in einem SINUS-Set mehrere Jahre auseinandergesetzt. Grundlage für die Arbeit im SINUS-Set war eine Analyse der Kompetenzen, die von den Schülerinnen und Schülern zum erfolgreichen Abschluss der schulischen Bildung mit dem Abitur in Nordrhein-Westfalen erwartet werden.

2.2 Ausgangslage klären und angleichen

Zu Beginn der Einführungsphase fallen der Lehrperson in der Regel als erstes die mangelnde Beherrschung grundlegender Algorithmen und andere fachliche Defizite auf. Diese Defizite konnten in der Sekundarstufe I aus welchen Gründen auch immer nicht behoben werden. Im Verlauf des Unterrichtes führen diese Defizite dazu, dass Schülerinnen und Schüler gestellte Aufgaben nicht bearbeiten können. Will man hier gegensteuern, dann müssen diese Defizite zunächst diagnostiziert werden.

2.2.1 Eingangstest für die Einführungsphase

Eingangstest Einführungsphase (6449)

Innerhalb des SINUS-Sets ist deshalb ein Eingangstest entwickelt worden[1], der die Bereiche Algebra, Funktionen und Textverständnis abdeckt und zu Beginn der Einführungsphase verortet ist. Dieser

[1] Prof. Dr. Susanne Prediger, Institut für Entwicklung des Mathematikunterrichts (TU Dortmund), hat die Entwicklung wissenschaftlich begleitet

Test ist in unterschiedlichen Szenarien sehr flexibel einsetzbar. Neben einem Excel-Auswertungstool gibt es auch eine Moodle-Version des Tests.
Eine ausführliche Dokumentation zu diesem Test, sowie alle benötigten Dokumente stehen auf der Internetseite www.sinus.nrw.de zum Download bereit.

2.2.2 Unterrichtsmaterialien zur individuellen Förderung

Unterrichtsmaterialien (6582)

Die im Eingangstest erkannten Defizite sollten individuell behoben werden. Nur so ist ein erfolgreicher Besuch der Oberstufe im Fach Mathematik gewährleistet. Im SINUS-Set sind hierzu einige Materialien entwickelt worden, die im Anschluss an den Test im normalen Unterricht oder in Vertiefungs- und Förderkursen eingesetzt werden können. Es ist ebenfalls möglich, diese Materialien bereits in der Sekundarstufe I einzusetzen, um vorbeugend Defizite zu vermeiden. Schwerpunkt dieser Materialien ist der „funktionale Zusammenhang".

2.3 Interesse wecken und fördern

In der zweiten Phase der Arbeit innerhalb dieses SINUS-Sets ist der Aspekt der Motivation der einzelnen Schülerinnen bzw. Schüler in den Blick genommen worden.

> „Das Ausmaß des *Lernerfolges* eines Schülers kann in einer einfachen Formel ausgedrückt werden: Lernerfolg ist das Produkt aus *investierten Mitteln* (z. B. Arbeitszeit, kognitive Fähigkeiten, bisherige Erfahrungen) und dem *motivationalen Faktor* (Interesse, Sympathie, Freude etc.)." (Stangl 2003)

Gerade diese motivationalen Faktoren können im Rahmen eines normalen Unterrichts – im Gegensatz zu den investierten Mitteln – kaum beeinflusst werden. Trotzdem wollten die Mitglieder der SINUS-Gruppe wissen, wie Situationen im Unterricht gestaltet werden können, die dazu führen, dass viele Schülerinnen und Schüler aktiv und mit Interesse lernen. Dabei fokussierte die Gruppe auf den Begriff des Interesses der Schülerinnen und Schüler als positive emotionale Befindlichkeit.

Jede Lehrerin und jeder Lehrer hat bestimmt schon einmal folgende Situation erlebt: Ein Großteil der Lerngruppe setzt sich intensiv mit einem Thema, einem Gegenstand auseinander. Es wird diskutiert, vermutet, überprüft und verworfen, wieder neu diskutiert… Häufig entstehen solche Situationen auch ungeplant und spontan im Unterricht. Am Ende einer solchen Phase/Stunde bekommt man von Schülerinnen und Schülern dann oft die Reaktion „Das war richtig spannend heute!" Wäre es nicht schön, Situationen in denen das Interesse am mathematischen Gegenstand so deutlich erkennbar ist, öfter zu erleben?

Das persönliche Interesse der Schüler ist dabei ein Konstrukt, das eine stabile Person-Gegenstands-Beziehung beschreibt, die sich in Aktivitäten mit folgenden Merkmalen zeigt:

- kognitive Merkmale (d. h., dass Interessenaktivitäten auf Erkenntnisgewinn ausgerichtet sind)

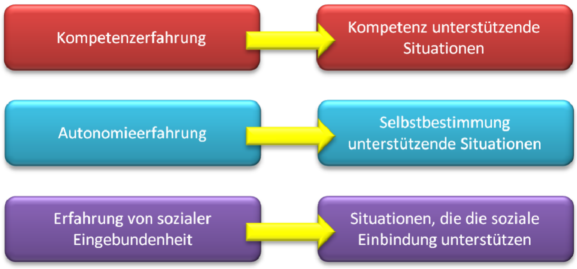


Abbildung 2.1: Erfüllung psychischer Grundbedürfnisse

- emotionale Merkmale (d. h., dass Interessenaktivitäten überwiegend emotional positiv erlebt werden)

- wertbezogene Merkmale (d. h., dass Interessenaktivitäten einen besonderen Wert durch den Interessengegenstand selbst erhalten, selbstintentional) (vgl. Krapp 1992; Krapp 1998b; Krapp 1998a)

Wenn Schülerinnen und Schüler mit Interesse lernen, dann nutzen sie tiefergehende Lernstrategien und behalten Inhalte länger im Gedächtnis. Außerdem lernen sie dann mit Freude und nachhaltiger. Wer mit Interesse lernt, will mehr über den Interessengegenstand wissen und baut zudem intuitives Wissen über diesen Gegenstand auf. Nicht zu vernachlässigen ist auch, dass durch Interesse die Ausdauer gesteigert werden kann, sich mit einem Gegenstand auseinanderzusetzen (vgl. Krapp 1992; Krapp 1998b; Krapp 1998a; für einen Überblick vgl. auch Bikner-Ahsbahs 2005, S. 7). Das sind alles gute Gründe, um sich mit Interesse im Mathematikunterricht auseinanderzusetzen.

Wie aber kann Interesse von Schülerinnen und Schülern initiiert und gefördert werden? Nach der Selbstbestimmungstheorie (von Deci und Ryan 1993; Deci 1998) wird durch die Erfüllung psychischer Grundbedürfnisse Lernen mit Interesse gefördert, das heißt wenn Schülerinnen und Schüler in Verbindung mit dem betreffenden Gegenstand

- Kompetenzerfahrung,
- Autonomieerfahrung und
- Erfahrungen von sozialer Eingebundenheit

erleben. Können diese psychischen Grundbedürfnisse im Unterricht durch entsprechende Situationen (Abbildung 2.1) unterstützt werden, dann kann es gelingen situationsgebundenes Interesse zu entwickeln, das bei wiederholten Interessenerfahrungen später vielleicht sogar in persönliches Interesse übergeht (Hidi und Renninger 2006).

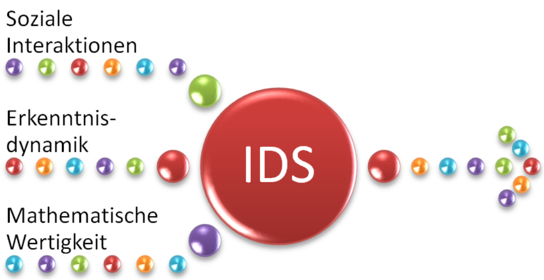


Abbildung 2.2: Interessendichte Situationen (IDS)

2.3.1 Interessendichte Situationen

Frau Prof. Dr. Bikner-Ahsbahs[2] (2005) hat eine größere Zahl von Situationen in Mathematikunterrichtsstunden analysiert, in denen Schülerinnen und Schüler mit großem Interesse gemeinsam lernten. Dabei ging es sowohl um Situationen, die spontan im Unterricht auftraten, als auch um Situationen, die von der Lehrkraft bewusst angestoßen wurden.

Das situative Interesse bei einer mathematischen Fragestellung war bei Schülerinnen und Schülern dann besonders hoch, wenn sich in der Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt in der Lerngruppe kollektive Aktivitäten zeigten, so dass

- die Lernenden sozial interaktiv an der mathematischen Fragestellung involviert sind (*Involviertsein*),
- die Lernenden fortgesetzt weiterführende Bedeutungen konstruieren (*positive Erkenntnisdynamik*),
- Wertschätzung zu den mathematischen Inhalten, Aktivitäten (implizit oder explizit) vorhanden ist (*mathematische Wertigkeit*).

Kurzdarstellung des Konzeptes interessendichter Situationen (6604)

Eine Unterrichtssituation im alltäglichen Mathematikunterricht nennt Frau Prof. Bikner-Ahsbahs *interessendichte Situation* (kurz: IDS), wenn darin situatives kollektives Interesse entsteht.
Ist es möglich, solche interessendichten Situationen durch geschickte Planungen von Unterrichtsstunden anzustoßen? Wenn ja, wie können sie stabilisiert werden und was behindert die Entstehung solcher Situationen?

Interessendichte Situationen entstehen und stabilisieren sich auf drei Ebenen (Abbildung 2.2): Die zentralen Punkte dieser Ebenen werden im Folgenden kurz beschrieben. Eine ausführlichere Beschreibung steht unter www.sinus.nrw.de.

[2] Leiterin der AG Didaktik der Mathematik der Universität Bremen

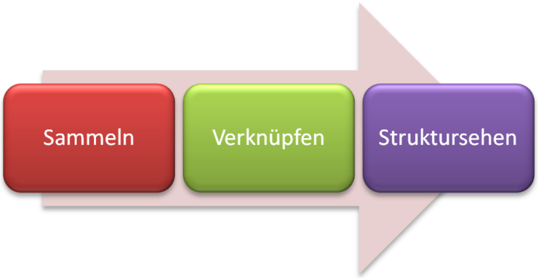


Abbildung 2.3: Erkenntnisprozess

Generierung und Stabilisierung aus der Perspektive der sozialen Interaktion

Interessendichte Situationen zeichnen sich dadurch aus, dass darin nicht die inhaltlichen Lehrererwartungen den Prozess steuern. Die Lehrkraft konzentriert sich auf den inhaltlichen Erkenntnisprozess der Lernenden mit einer interessierten und wertschätzenden Haltung und dem Vertrauen darauf, dass die Lernenden fundierte Erkenntnisse entwickeln werden. Sie unterstützt, wenn Worte fehlen, erkennt das mathematische Potenzial in den Schülerüberlegungen und gibt gegebenenfalls Hilfestellungen zum Weiterdenken. Bei unscharfen Formulierungen und Beiträgen kann sie auch provozieren, um Inhalte explizit werden zu lassen oder eine Präzisierung zu erzeugen. Wenn Lernende tiefgehende mathematische Inhalte zu fassen versuchen, unterstützt die Lehrkraft diesen Prozess, indem sie Inhalte zugänglicher macht oder Handlungsoptionen formuliert. Lernende ihrerseits konzentrieren sich auf ihren eigenen Denkprozess und nicht auf vermeintliche Lehrererwartungen.

Generierung und Stabilisierung aus der Perspektive der Erkenntnisdynamik

Erkenntnisprozesse können im Prinzip mit drei unterschiedlichen, auf Erkenntnis ausgerichteten, Handlungen modelliert werden (vgl. Abbildung 2.3).

Video: Struktursehen (6622)

Sammeln mathematischer Bedeutungen meint Zusammentragen relevanter ähnlicher Sachverhalte zu einer Frage oder zu einem gestellten Problem, *Verknüpfen* meint eine überschaubare Anzahl von Sachverhalten miteinander zu verbinden und *Struktursehen* meint einen prinzipiell durch eine beliebige Menge von Beispielen darstellbaren Sachverhalt erkennen, entweder als neue Einheit oder als bekanntes Objekt in einem neuen Kontext. Jede interessendichte Situation führt zu Struktursehen.

Dieser Dreiklang „Sammeln, Verknüpfen, Struktursehen“ kann auch von der Lehrkraft oder dem Material angeregt werden[3]. Er kann dabei stufen- oder spiralförmig angelegt werden oder als zusammenfließender Prozess. Nicht immer findet Struktursehen statt, z. B. wenn eine Gruppe von Lernenden eine Aufgabe als abgeschlossen ansieht, obwohl sie das nicht ist, oder wenn ein falsches Ergebnis

[3] s. Beispiele in Kapitel 2.3.2 Unterrichtsszenarien

als wahr angesehen wird. Es ist dann die Aufgabe der Lehrkraft, durch Hinweise auf Widersprüche oder Lücken den stockenden Prozess wieder in Gang zu bringen.

Generierung und Stabilisierung aus der Perspektive der mathematischen Wertigkeit

Video: Mathematische Wertigkeit (6623)

Zentrales Merkmal interessendichter Situationen aus Sicht der mathematischen Wertigkeit ist, dass ein impliziter Sozialvertrag gelebt wird: Die Lernenden produzieren mathematisch wertvolle Ideen im Sinne der Fragestellung und die Lehrkraft hilft ihnen dabei. Dabei ist Autorenschaft wichtig, also dass Ideenproduzenten bzgl. des Wertes ihrer Ideen anerkannt werden. „Ullas Regel“, „Armins Vermutung“ können das ebenso ausdrücken wie spontane Wertschätzungen in der Klasse, wie z. B. „das ist ja einfach, das mache ich auch so“ oder „cool, gute Idee“.[4] Untersuchungen dazu haben gezeigt, dass sich dabei die Erkenntnisprozesse zu Produktionstypen zusammenfügen: z. B. als Ideenwettbewerb, bei dem eine Idee die nächste hervorruft, oder aber man ringt um einen neuen Sachverhalt in der innovatorischen Ideenproduktion, man prüft eine Behauptung in einem Prozess der Güteprüfung, oder es entsteht eine Expertenshow, in der sich Lernende als Experten zeigen, wenn sie sich eine Sache zu Eigen gemacht haben und diese dann reihum vorstellen und hinterfragen.

2.3.2 Unterrichtsszenarien

Ausgehend von den Überlegungen über interessendichte Situationen sind innerhalb des SINUS-Sets zwei Unterrichtsszenarien entwickelt worden, die sich am Erkenntnisprozess „Sammeln, Verknüpfen, Struktursehen“ orientieren. In beiden Unterrichtsszenarien sind diese Elemente in der Struktur der Unterrichtsstunde bereits angelegt. Schülerinnen und Schüler sammeln zunächst ihre Beobachtungen innerhalb einer Gruppe, verknüpfen sie mit den Ergebnissen anderer Gruppen und versuchen Gemeinsamkeiten und Strukturen zu entdecken. Die Chance, dass interessendichte Situationen entstehen können, ist also gegeben.

Unterrichtsszenario „Entdeckungen von Zusammenhängen zwischen den besonderen Punkten eines Funktionsgraphen und dessen Ableitungen“

IDS: Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungen (6605)

Beschreibung des Szenarios

In dem ersten Szenario, das für die Einführungsphase entwickelt wurde, geht es um die Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten. Dabei soll das Entdecken von Zusammenhängen zwischen einer Funktion und deren Ableitungen in Bezug auf die besonderen Punkte[5] zu Regeln zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten führen. Eine Grobskizze dieses Unterrichtsszenarios ist in der Abbildung 2.4 dargestellt. Die entsprechenden Arbeitsblätter stehen zum Download bereit. Die Grob-

[4] s. auch Kapitel2.4.1 Chancen zur Aktivierung nutzen

[5] Die Begriffe Nullstelle, Hochpunkt (lokales Maximum), Tiefpunkt (lokales Minimum) und Wendepunkt sollten als Bezeichnungen bekannt sein.

skizze lässt der Lehrkraft bewusst Raum, dieses Unterrichtsszenario an die Bedürfnisse und die Besonderheiten ihrer Lerngruppe anzupassen.

Das Szenario in Abbildung 2.4 auf Seite 14 enthält in der ersten Erarbeitungsphase das *Sammeln* als ersten Schritt der Erkenntnisdynamik einer interessendichten Situation. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten in Kleingruppen an unterschiedlichen Funktionen. Die Graphen dieser Funktionen sollen zunächst von der Gruppe gemeinsam vergrößert in ein auf einem Poster vorbereitetes Koordinatensystem gezeichnet werden. Dieser Schritt ist aus zweierlei Gründen wichtig:

1. Die Lernenden nutzen bei der Übertragung auf das Poster intuitiv die Lage der besonderen Punkte. Somit werden schon in dieser Phase erste Entdeckungen vorbereitet und möglich.

2. Die motorische Aktivierung[6] unterstützt die anschließenden kognitiven Prozesse.

In einem zweiten Schritt werden dann mithilfe des eigenen Posters von der Gruppe Hypothesen zu den möglichen Zusammenhängen zwischen den besonderen Punkten der Funktions- und Ableitungsgraphen formuliert. Dies entspricht dem *Verknüpfen* im Prozess der Erkenntnisdynamik. Die anschließende gemeinsame Erarbeitung von mathematischen Zusammenhängen anhand der Schülerhypothesen entspricht dem *Struktursehen*.

Umgang mit Schülerhypothesen

Die Erprobung dieses Szenarios in mehreren Grundkursen der Einführungsphase hat gezeigt, dass Schüler ausgesprochen kreativ im Aufstellen von Hypothesen sind. Dies gilt sowohl bezüglich der Darstellung und Ausdrucksweise als auch bezüglich des Inhaltes. Abbildung 2.5 auf Seite 15 zeigt einige Beispiele. Als Lehrkraft gilt es, den Prozess des Struktursehens – trotz dieser an einigen Stellen in Bezug auf das gewünschte Ergebnis nicht hilfreichen Hypothesen – zu steuern. Bei falschen oder allgemeingültigen Hypothesen, die den Überprüfungs- und Präzisierungsprozess überlebt haben, ist es wichtig, dass diese nicht kommentarlos aussortiert werden. Das bedeutet nicht, dass man lange über diese Hypothesen diskutieren muss, sondern ein Verfahren anwendet, das die berechtigte Erwartungshaltung der Schüler auf eine Rückmeldung ernstnimmt. Es können z. B. Schüler aus der Lerngruppe selber schnell entscheiden, ob es sich um sinnvolle Hypothesen handelt, oder der Lehrer gibt ein Raster vor (gilt immer, gilt manchmal, gilt nie) um die Hypothesen zu klassifizieren. Diese Beispiele kann man sich unter www.sinus.nrw.de in einem Video anschauen.

Video: Umgang mit Schülerhypothesen (6625)

Bei manchen Hypothesen sind die Formulierungen der Lernenden nicht ganz ausgereift. Das kann zu halbrichtigen oder falschen Sätzen führen, obwohl die Gruppe das Richtige meinte. Erkennt die Lehrkraft solche „vielleicht doch richtigen" Hypothesen, kann die Bitte zur Erläuterung oder Präzisierung für die Gruppe hilfreich sein. Ihre Ergebnisse werden so wahrgenommen und ihre Denkprozesse gewürdigt. Sie merkt außerdem, dass eine präzise Ausdrucksweise hilfreich sein kann.

Bei der Durchführung dieses Szenarios konnte beobachtet werden, dass in diesem letzten Teil, dem Struktursehen, die beiden voran gegangenen Teile für die Schülerinnen und Schüler in einer ausgesprochen positiven Art sehr fordernd sind. Sie haben viel gedacht, diskutiert, verschriftlicht,

[6] siehe auch Kapitel 2.4.1 Chancen zur Aktivierung nutzen

Entdeckungen von Zusammenhängen zwischen den besonderen Punkten eines Funktionsgraphen und dessen Ableitungen

Szenario

Einführung in die Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten über das Auffinden von Zusammenhängen zwischen einer Funktion und deren Ableitungen. Die Schüler kennen bereits den Begriff der Ableitungsfunktion und die Begriffe „Nullstellen“, „Hochpunkt“, „Tiefpunkt“ sowie „Wendepunkt“.

Ziel

Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass Zusammenhänge zwischen „besonderen“ Punkten der Graphen einer Funktion und deren Ableitungen existieren. Sie formulieren entsprechende Hypothesen und überprüfen bzw. präzisieren diese.

Unterrichtliches Vorgehen

Einstiegsphase:

Problemstellung – Informativer Einstieg. Anhand einer Folie werden die besonderen Punkte einer Funktion noch einmal herausgestellt.

Aufgabenstellung:

„Untersuchen Sie, welche Zusammenhänge zwischen den besonderen Punkten des Graphen der Funktion und den besonderen Punkten der Ableitungsfunktionen existieren.“

1. Erarbeitungsphase:

Arbeitsteilige Gruppenarbeit. Übertragen von Funktionsgraphen auf ein großes Flip-Chart-Papier und Kennzeichnung der „besonderen Punkte“. Formulierung von Hypothesen anhand der eigenen Funktion. Überprüfung und Präzisierung der Hypothesen anhand der Funktionen aus anderen Gruppen. Ergebnisse auf DIN A4 Papier festhalten.

Präsentation:

Die DIN A4 Blätter mit den gefundenen Hypothesen werden an der Tafel zunächst ungeordnet befestigt.

2. Erarbeitungsphase:

Die Hypothesen werden im Plenum verglichen, diskutiert und geordnet. Die allgemein anerkannten und begründeten Aussagen werden schließlich im Mathematikheft festgehalten.

Abbildung 2.4: Unterrichtsszenario 1 – Interessendichte Situationen

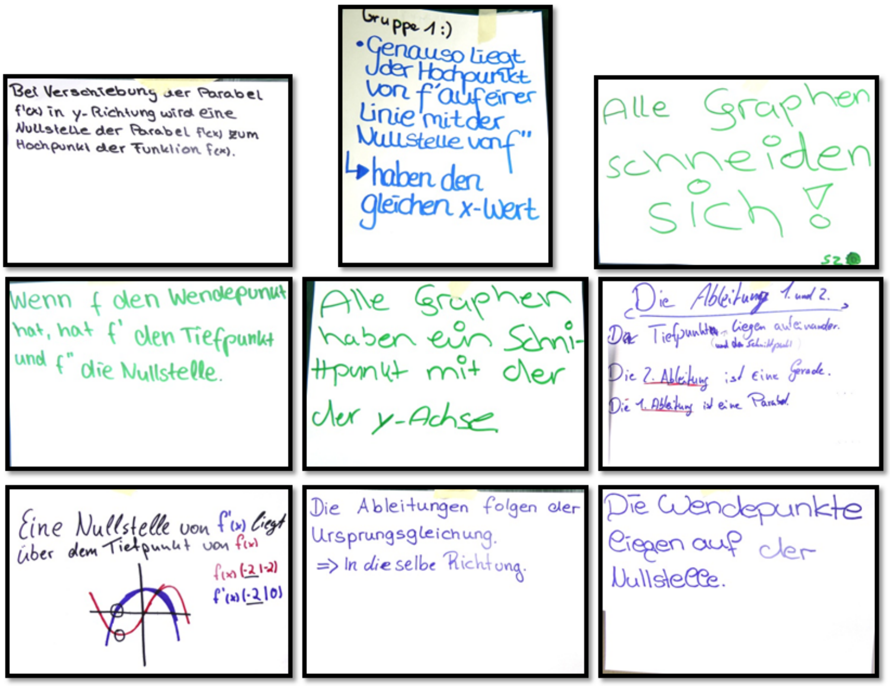


Abbildung 2.5: Gesammelte Schülerhypothesen

geprüft, verworfen und letztlich für gut befunden. Dies kostete Kraft, weil es ein sehr intensiver Prozess war. Sie selber waren ja auf dem Weg, ein Stück Mathematik zu erfinden. Diese eingesetzte Kraft fehlte dann zum Teil in der letzten Phase. Hier wären evtl. andere Arbeitsformen denkbar, die weniger anstrengend sind als eine Diskussion mit der gesamten Lerngruppe, oder der Einsatz von lohnenden Pausen[7], um die Aktivierung auf einem möglichst hohen Niveau zu halten.

Unterrichtsszenario „Die Bedeutung von Flächen unter Funktionsgraphen im Sachzusammenhang und deren Berechnung“

In diesem Szenario geht es darum, dass die Schüler entdecken, dass der Fläche unter einer Kurve eine spezielle Bedeutung zukommt. Die Diagramme auf den zugehörigen Arbeitsblättern stellen hierfür unterschiedliche Anwendungszusammenhänge bereit. In einem zweiten Schritt entwickeln die Schülerinnen und Schüler selbstständig ein Verfahren, um diese Flächeninhalte zu berechnen. Die Grobskizze dieses Unterrichtsszenarios ist in der Abbildung 2.6 dargestellt. Vom Unterrichtsgegenstand ist dieses Szenario in der Qualifikationsphase angesiedelt und kann zum Einstieg in die Integralrechnung genutzt werden.

IDS: Integration (6624)

[7] s. auch Kapitel 2.4.3 Lohnende Pausen einsetzen

Auch hier spielen die Handlungen Sammeln, Verknüpfen und Struktursehen eine wesentliche Rolle. Der Ablauf des Szenarios ist an diesem Erkenntnisprozess ausgerichtet.

Das *Sammeln* findet in einer ersten Erarbeitungsphase statt. Mit Hilfe der „Ich-Du-Wir"-Methode erschließen sich die Schüler zunächst die Zusammenhänge innerhalb des Diagramms ihrer Gruppe. Unterschiedliche Berechnungen führen schließlich direkt in die Bestimmung einer Fläche.
Eine dieser Flächen ist gut mit einem Rechteck anzunähern, die andere ist eine krummlinig begrenzte Fläche[8]. Hier ist Ideenreichtum der Schüler gefragt. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Problemlösung rein rechnerisch erfolgt oder durch geometrische Überlegungen innerhalb des Diagramms. Das Ergebnis der Gruppe wird auf einem Plakat festgehalten. Im anschließenden Museumsgang kann sich jede Gruppe über die Ergebnisse der anderen Gruppe informieren und mit den eigenen Ergebnissen vergleichen (*Verknüpfen*).

Das *Struktursehen* findet dann zum Schluss unter Rückgriff auf die Plakate im Klassengespräch statt. Am Ende sollte sowohl ein Verständnis für die Bedeutung von Flächen unter der Kurve, als auch eine Idee für deren Berechnung stehen.

2.4 Motivationspsychologische Aspekte

Ausgehend von den Videoaufzeichnungen der oben beschriebenen Szenarien in unterschiedlichen Kursen, wurden mit Unterstützung von Herrn Dr. Heiner Langenkamp[9] Handlungsalternativen und -vorschläge herausgearbeitet, die sich auf die Motivation der Schüler aus psychologischer Sicht beziehen.

In den Unterrichtsszenarien werden die Schülerinnen und Schüler mit einer Situation konfrontiert (Aufgabenblätter und Plakat, große Blätter mit Koordinatenvorlage), die eine *Orientierungsreaktion* auslöst („Was ist das?", „Was soll da passieren?").

Je nach Ausprägung der Voreingenommenheit für oder gegen „Mathematik" wird aus der Orientierungsreaktion die individuelle Stärke eines Interesses an der Lösung der Situation (Aufgabeninhalt) entstehen. Die Voreingenommenheit setzt sich im Wesentlichen aus zwei Komponenten zusammen: Zum einen aus der spontanen Beurteilung der aus den vorausgehenden Stunden „erworbenen" Kompetenzen („Nix verstanden – poh!", „War hart", „Geht so – ah, klar!", „Das ist das…"), zum anderen im Zusammenwirken mit dem generalisierten Selbstkonzept der eigenen Mathematikleistungsfähigkeit („Kann ich" – „Geht so" – „Mathe kann ich nicht").

Soll die Aufgabenstellung von jedem einzeln bearbeitet und erfüllt werden, dann kann erwartet werden, dass nach dem vorstehend Gesagten Schülerinnen oder Schüler mit einer eher ablehnenden Voreingenommenheit mehr und stärkere Angstempfindungen entwickeln dürften als diejenigen mit einer neutralen Selbstbewertung. Positiv Voreingenommene dürften demgegenüber herausfor-

[8]Ausnahme: Die Gruppe mit dem Sachzusammenhang „Messung des Lungenvolumens" hat nur eine krummlinig begrenzte Fläche zu berechnen.

[9]Sportpsychologe, ehemals am Lehr- und Forschungsbereich Sportpsychologie der Ruhruniversität Bochum

Die Bedeutung von Flächen unter Funktionsgraphen im Sachzusammenhang und deren Berechnung

Szenario

Einführung in die Integralrechnung über die Berechnung von Wirkungen in realistischen Anwendungssituationen – Sinnstiftung

Ziel

Die Lernenden erkennen, dass die Fläche unterhalb eines Graphen für alle Beispiele eine analoge Bedeutung hat – es also sinnvoll ist, eine Methode zu finden, diese zu bestimmen und zu berechnen. Sie sollen diese Flächen näherungsweise bestimmen.

Unterrichtliches Vorgehen: (grobe Skizze)

Einstiegsphase:	Problemstellung – Informativer Einstieg
1. Erarbeitungsphase:	arbeitsteilige Gruppenarbeit, ggf. leistungsdifferenzierte Gruppen Sammlungsphase – mit „Ich-Du-Wir“ Methode Erstellen einer Plakatpräsentation für einen Museumsgang
Präsentation:	z. B. Museumsgang
2. Erarbeitungsphase:	Gemeinsames Ergebnis formulieren zu allen Beispielen

Abbildung 2.6: Unterrichtsszenario 2 – Interessendichte Situationen

dernde innere Erregungen entwickeln. Bei der Bearbeitung durch Einzelarbeit würden Teilschritte und Lösungen überwiegend im Dialog (Abfrage) des Schülers mit oder über den Lehrer erfolgen, der so sowohl Prozessbegleiter wie vor allem direkt Bewerter wird.

Gruppensituation
Die soziale Interaktion, die für die Erzeugung interessendichter Situationen wichtig ist, kann hier ihre Wirkung entfalten. In der Gruppensituation tritt die Lehrkraft zurück, indem sie zunächst überhaupt nicht bewertet (und vor allem nicht individuell bewertet) und alle Schülerinnen und Schüler erfahren, dass sie nur den Gruppenprozess anregt, begleitet, orientiert und ggf. lenkt! Diese Erfahrung reduziert massiv Angstempfindungen zugunsten positiver Effekte auf Lernprozesse (Spitzer 2002). Zugleich ermöglicht die Situation innerhalb einer *Gruppe* den positiv Voreingenommenen ihre lösungsorientierte innere Erregung umzusetzen.

An diese Art des Lernens müssen Schülerinnen und Schüler sich erst gewöhnen. Wenn sie erfahren, dass sie nun weniger (Fach-)Ängste haben ‚müssen', also entspannter agieren können, werden sie auch eine entsprechende Arbeitshaltung und -aktivität entwickeln und beibehalten.

Unsere Unterrichtsbeobachtungen zeigen, dass einige Lernende durch die Spannungsreduktion zunehmend mehr in eine passive (also lernungünstige), weite[10] Aufmerksamkeitshaltung übergehen. Hier könnten und sollten Chancen zur *Aktivierung* genutzt werden.

Im Folgenden werden einige Punkte in Bezug auf motivationspsychologische Aspekte näher beleuchtet, u. a. auch der Punkt Aktivierung. Die meisten dieser Punkte sind aus der Analyse der Videoaufzeichnungen der oben erwähnten Szenarien im SINUS-Set als bedeutsam hervorgegangen. Eine umfassende Darstellung der psychologischen Hintergründe ist hier allerdings nicht zu leisten. Die Punkte sollen anregen, sein eigenes Lehrerverhalten kritisch zu hinterfragen: „Was tue ich schon in meinem Unterricht?" – „Kann ich bestimmte Dinge noch intensivieren?" – „Worauf sollte ich in Zukunft verstärkt achten?" – „Wo stehe ich als Lehrperson der Entwicklung der Schüler im Weg?" … Ein Automatismus („Wenn ich das tue, dann reagiert der Schüler so.") kann ebenfalls nicht vorgegeben werden, allerdings können die folgenden Punkte die Handlungsalternativen der Lehrperson erweitern und in unterschiedlichen Situationen einfach ausprobiert werden.

2.4.1 Chancen zur Aktivierung nutzen

Aktivierung von Schülern innerhalb einer Arbeitssitzung kann man auf unterschiedliche Weise erreichen.

- Motorische Aktivierung (Aufstehen, Bücken, im Stehen zeigen…) am oder um einen Gruppentisch herum, mehrere zur Tafel bitten; etwas aufhängen müssen… Grundgedanke: [kon-

Video: Motorische Aktivierung 1 (6615)

[10] Weite Aufmerksamkeit bedeutet etwa, dass ich das Gesamt meines Seh- und Hörfeldes beachte und darin ‚Bewegung' mitbekomme. Enge Aufmerksamkeit steht dagegen für den Wechsel vom Gesamt auf einen Ausschnitt meines Wahrnehmungsfeldes, ich konzentriere mich sozusagen auf etwas. Wir wechseln zwischen eng und weit nach Situationsanforderungen und auch persönlichen Eigenheiten.

trollierte] motorische Aktivierung verbessert und verstärkt auch kognitive Prozesse (Kubesch 2008)

- Um die Aktivierung von Schülern zu erhöhen, kann es hilfreich sein, die Rollenverteilung zu Beginn der Arbeitsphase deutlich zu machen: „Ich bin gespannt auf *Eure* Ergebnisse. – *Ihr* seid jetzt dran!“ Der Lehrer zeigt authentisch Interesse an dem Prozess der Schülerinnen und Schüler und an ihren Ergebnissen.

- Wenn der Lehrer ‚in eine Gruppe‘ geht, kann er über eine Ich-Botschaft einen eher passiven, stillen, ggf. ‚schwächeren‘ Schüler ansprechen: „Hoppla, hab ich grad‘ nicht ganz mitbekommen, was Peter da gesagt hat. Klaus, wie hast du das mitbekommen oder ist dir das auch unklar?“ Zunächst ist unerheblich, was jetzt Klaus sagt, wichtig ist, dass er etwas sagt, dass er aktiv wird. Es kann durch solche Aktivierungen ein Mitschüler oder Klaus oder … sprechen, d. h. eine Haltung und ein Prozess können verstärkt werden. Die Wahrscheinlichkeit nimmt zu, dass inhaltliche Aspekte thematisiert werden, auch von ‚solchen‘ Schülern wie Klaus.

- Der Lehrer kann den Gruppen in der Gruppenphase oder bereits zu Beginn vorschlagen, dass der-/diejenige in der Gruppe die Hypothesen (o. Ä.) auf die Blätter schreibt, die in der Gruppenarbeitsphase – nach Meinung der Gruppe – zurückhaltender war; am besten (sprachlich!) formulieren kann; bisher selten geschrieben hat; …

Video: Motorische Aktivierung 2 (6616)

Video: Klärung der Rollen (6617)

Video: Aktivierung durch Ansprechen (6618)

Weitere Möglichkeiten zur Aktivierung sind natürlich denkbar. Wichtig ist: Gelingt es einen Schüler wieder für den Prozess zu aktivieren, dann steigt die Wahrscheinlichkeit, dass der Schüler sich auch wieder mit den mathematischen Inhalten auseinandersetzt. Aktivierung quasi als Weckruf.

2.4.2 Prozessbeteiligung stärken

Neben der Aktivierung konnten durch die Videoanalysen Möglichkeiten erkannt werden, Prozessbeteiligungen von Schülern individuell zu stärken, indem auch kleinere, sachlich (noch) nicht wirklich fortführende Aussagen, Hinweise, Bemerkungen nicht nur hingenommen, sondern für den Schüler als Beitragenden aufwertend rückgemeldet werden. Wenn auf eine Fragestellung hin ein Schüler eine unklare oder gar (inhaltlich) falsche Antwort gibt, ist zunächst einmal zu unterstützen, dass er/sie mitgedacht hat, die Frage zu bearbeiten.[11] Die vermutlich einfachste Form, das ‚Mitarbeiten‘ unabhängig vom Wert (Ergebnis) der Mitarbeit zu stützen liegt darin, zunächst

1. die Aktivität zu stärken (etwa: „Ja, das ist eine Antwort auf meine Frage, Bettina, gut“) und dann

[11] Die ‚echte‘ Frage wird ja mit der prinzipiellen Möglichkeit gestellt, zutreffend oder unzutreffend beantwortet zu werden. Haben die Befragten die Erfahrung verinnerlicht, dass nur Ergebnis zutreffende Antworten ‚erwünscht‘ sind (= positiv bewertet werden), wird es weniger Antwortbereite geben.
Vgl. auch Ausführungen in Kapitel 2.4.5 Personentypische Informationsverarbeitung – Umschaltfähigkeit fördern.

2. darum zu bitten, den Gedankengang zu beschreiben(!) (etwa: „Erklär mal kurz, welche Gedanken in deinem Kopf abgelaufen sind für deine Antwort").[12]

Die Nachfolgeaufforderung (2) kann man auch bei sachlich zutreffenden Antworten erbitten, so dass erkennbar wird, dass man nicht nur bei negativen Ergebnissen den Gedankengang erfragt, sondern immer oder häufiger zugrundeliegende Gedankengänge (Prozesse). Dadurch macht man überindividuell deutlich, dass für die Lehrkraft und die Mitschüler über das Beschreiben des Gedankenganges der *Lösungsprozess* der Aufgabe transparent wird. Die Gruppenorganisation kann dazu beitragen, dass die von den Schülern internalisierten am reinen „Ergebnis" orientierten Wertungsreaktionen („Nee, das ist falsch!" – „Wie kommste denn darauf…!" – „Oh man, Blödsinn!") bald zurückgehen. Produktive Aussagen werden mit dem Interesse an Lösung beim Mitschüler wahrgenommen und vermehrt zu einem Rückmeldediskurs genutzt („Ey Klaus, da hast du doch übersehen…" – „Wie du angefangen hast, kannst du das noch mal sagen, da stimmte was nicht…").

Mit den Prozess-Anteilen kann man anschließend weiterarbeiten (etwa: „Welche Voraussetzung fehlt für die Aussage noch?", „Welcher Aspekt ist zutreffend, aber zu erweitern?", „Wo weist der Gedankengang eine Lücke auf?", „Wenn ich dir zuhöre, fehlt mir die Anwendung der Formel … oder hast du die absichtlich weggelassen?").

Diese Individualisierung erscheint – hier kompakt formuliert – zeitaufwendig und auf die Inhalte bezogen ‚umwegig'. Auch hier gilt, dass ein Prozess eingeleitet wird, der etwas Zeit braucht, Vertrauen aufzubauen, dass es sich lohnt, mitzuarbeiten und dies nach außen zu zeigen, weil man nicht ‚abgewertet' wird, auch wenn man Umwege geht oder in Sackgassen wenden muss. Zum anderen erleben diese Lernförderhaltung die Mitschüler mit, so dass man aus der individuellen zu einer individualisierten Förderung gelangt (Co-Lernen). Für die persönliche Entwicklung kann damit übertragen werden:

(Am Anfang) Zeit verlieren, um Zeit zu gewinnen!

2.4.3 Lohnende Pausen einsetzen

Die Analyse der Videoaufzeichnungen zu den besonderen Punkten eines Graphen zeigte eine weitere Schwierigkeit:
Die Aufgabenstellung enthielt eine gute Strukturierung des äußeren Arbeitsprozesses: (I) Einführung in die Stunde – (II) Den inhaltlichen Aspekt der Aufgabenstellung (IIa) veranschaulichen (Graphen zeichnen) und dabei (IIb) Kriterien entdecken – (III) Zentrale Kriterien in Aussagen schriftlich fixieren und diese untereinander vergleichen – (IV) Aus den Fixierungen (Hypothesen) allgemein festgestellte Thesen zuordnen.

Es zeigte sich, dass in den Phasen (I) und (II), aber auch schon zwischen (IIa) und (IIb) *Handlungsabschlüsse* erlebt und für Beobachter sichtbar wurden. Dies kann man als Absenken des Moti-

[12] vgl. auch im Kapitel 2.3.2 den Abschnitt „Umgang mit Schülerhypothesen" (S. 13)

Abbildung 2.7: Vollständige Pausen und unvollständige, aber lohnende Pausen im Vergleich

vationszustandes nach Erreichen einer (Teil-)Zielmarke ansehen, nach Phase III spätestens nannten wir den Zustand in der Klasse ‚ermüdet', ‚platt'.[13]

Es lohnt also, auf die Schülerinnen und Schüler dahingehend zu achten, wie stark sie ein Produktionszyklus anstrengt, wo sie Zwischenziele als erreicht erleben, so dass dort lohnende Pausen eingefügt werden könnten. Das Konzept der lohnenden Pause im Vergleich zur vollständigen Pause ist schnell einsichtig.

Die Grafik auf der linken Seite der Abbildung 2.7 verdeutlicht eine vollständige Pause nach einer hohen Anstrengung. Die Bearbeiter sollen gut ausgeruht an die nächste Aufgabe herangehen. Die Grafik rechts zeigt, dass nach einer hohen Anstrengung eine Pause genommen wird, die aber nur kürzer währt, um dann die Aufgabenerledigung ‚frischer' wieder aufzunehmen.[14]

Man kann davon ausgehen, dass dann nach der Wiederaufnahme die Leistung höher liegt als unmittelbar vor einer solchen Pause. Dann hat sich die Pause ‚gelohnt'. In den von uns beobachteten Stunden zum Beispiel wurden Zusammenhänge leichter, schneller, überhaupt bzw. wieder erkannt, inhaltliche Fehler führten zur Aussortierung einer Hypothese etc.

Es kann also hilfreich sein, nicht auf eine ‚natürliche' Pause (Klingeln, Schulgong; Abschluss der Aufgaben insgesamt) zu warten, sondern in (schülerseitigen) Arbeitszyklen zu denken. Auch hier wäre es sinnvoll, nicht dem am ‚schnellsten, leichtesten ermüdbaren' Kursteilnehmer zu folgen, sondern

[13] s. Beobachtungen in Kapitel 2.3.2 im Abschnitt „Umgang mit Schülerhypothesen"

[14] „Zu häufige Wiederholungen sowie zu lange dauernde Beschäftigung mit dem gleichen Stoff führt zu Übersättigung. Planen Sie deshalb häufigere und kürzere Lernperioden. Hören sie rechtzeitig auf! Wenn Sie ihr Lernziel unerwartet schnell erreicht haben, freuen Sie sich über die gewonnene Freizeit. Am nächsten Tag werden Sie sich mit positiven Gefühlen wieder an die Arbeit setzen – wenn Sie bis zum Überdruss gelernt haben, fällt dieses schwer." Zitiert aus: www.stangl-taller.at (6663)

darauf zu achten was einerseits die Aufgabenstellung als Abschnitt anbietet und wie lohnenswert ein Einschnitt auch für ‚noch nicht überforderte' Schülerinnen und Schüler sein kann.

2.4.4 Arbeitsmethoden als nutzbar zurückmelden

Ein weiterer Ertrag aus den Stundenanalysen war, dass sich Chancen anboten, die Arbeitsmethode den Schülerinnen und Schülern als für sie nutzbar zurückzumelden. In einer kurzen Zusammenfassung kann man offenlegen, wie sie gearbeitet haben:

Video: Arbeitsmethoden reflektieren (6619)

> „Jeder hat auf die Aufgabenzettel und die Plakate gesehen, jeder war etwas neugierig! Dann habt ihr euch – mehr oder weniger zwar – an allen Gruppentischen gegenseitig angeregt, was zu den Vorlagen zu sagen, zu fragen oder zu erklären. Durch diese kommunikative Aktivität, dazu gehört ja auch das Zuhören, über die Inhalte der Kurvenpunkte und deren Besonderheiten habt ihr euer Lernen erneuert, gefestigt, ergänzt oder manchmal auch eingeleitet. Ihr habt euer Interesse genutzt! Dabei, das habe ich ja an den Tischen mitbekommen, habt ihr euch nicht in die Pfanne gehauen, wenn was nicht richtig oder klar oder schnell genug war. Das hat euch kreativ gemacht, die Aufgaben zu lösen, die Graphen zu zeichnen, die Hypothesen zu finden und hinzuschreiben. Ihr habt gemerkt, dass ihr dann etwas erschöpft ward. Trotzdem haben wir durch die verschiedenen Gruppenleistungen unser Arbeitsziel erreicht: Bedeutung der Kurvenpunkte, Zusammenhang zwischen den Ableitungen und der Funktion ..."

Lernen lernen wäre also eine Verstärkung der Arbeitsbereitschaft der Schülerinnen und Schüler, also auch solcher, die eher ‚mathe-fern' stehen.

Das gemeinsame, reflexive Betrachten von Arbeitsmethoden im Mathematikunterricht gehört in der Regel nicht zum Standardrepertoire einer Lehrkraft. Das mathematische Ergebnis steht normalerweise am Ende einer Unterrichtsstunde im Mittelpunkt. Werden Arbeitsmethoden als hilfreich und fruchtbar erkannt, dann werden die Schülerinnen und Schüler diese in Zukunft weiterhin versuchen anzuwenden. Gerade unmotivierte oder schwächere Schüler, die in der Arbeitsweise gemerkt haben, dass ihre Beteiligung und ihre Ideen wichtig waren, auch wenn es sich nur um kleine Beiträge gehandelt hat, werden auf diese positive Erfahrung auch in anderen Situationen zurückgreifen können.

2.4.5 Personentypische Informationsverarbeitung – Umschaltfähigkeit fördern

Menschen verarbeiten Informationen auf unterschiedliche Art und Weise. Die personentypische Art der Informationsverarbeitung zeigt sich dabei überwiegend bzw. ausschließlich im Spannungsfeld zwischen lageorientierter und handlungsorientierter Verarbeitung[15].

[15] Ein grundlegender Artikel vom Entwickler des Konzepts findet sich in (J. Kuhl und Kazén 2003). Eine interessante, übertragbare kleine Studie aus dem Sport: (Semmler-Ludwig 2001), im Internet unter http://www.tu-clausthal.de/presse/tucontact/2001/Dezember/tuc1/11a.pdf.

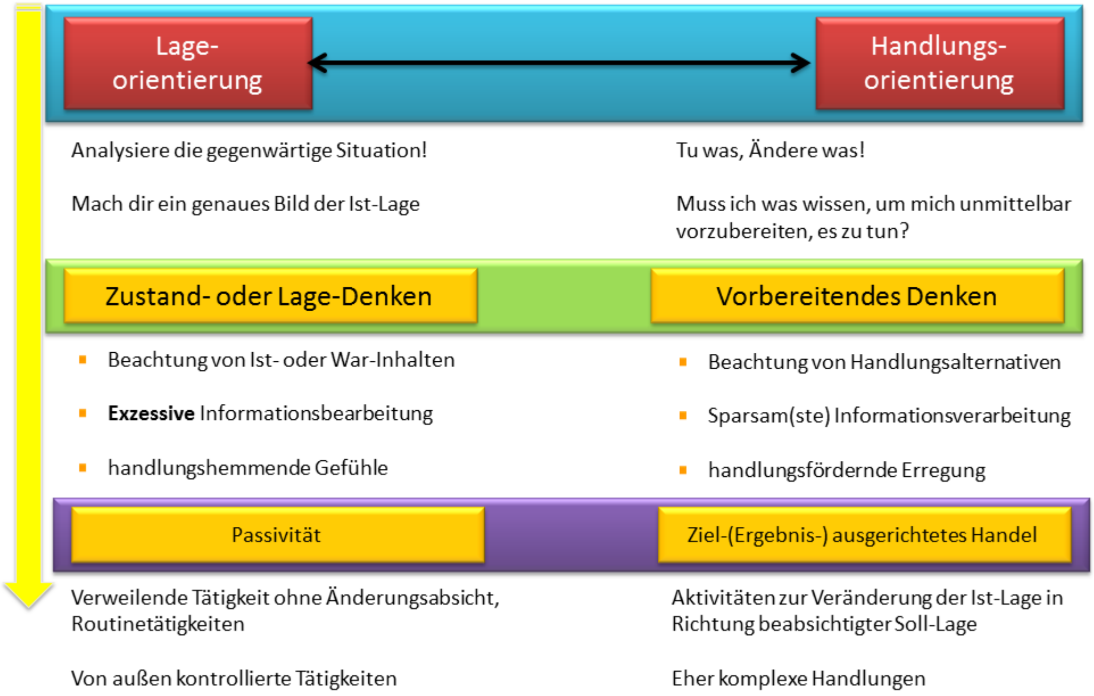


Abbildung 2.8: Eigenschaften und Auswirkungen von Lage- und Handlungsorientierung, (angelehnt an J. Kuhl und Kazén 2003)

In Abbildung 2.8 kann man erkennen, welche primären Eigenschaften und welche Auswirkungen die jeweilige Orientierung besitzt. Wenn man genauer untersuchen will, welcher Typ in welcher Ausprägung vorliegt, dann muss man die Schülerin/den Schüler in verschiedenen Situationen wiederholt beobachten. Typische Beobachtungsmerkmale können unter dem in der Marginalie angegebenen Link heruntergeladen werden.

Wichtig ist, eine Umschaltfähigkeit zwischen diesen beiden Orientierungen zu fördern, wenn diese nicht vorhanden erscheint:

- Umschalten von einem zu ausgeprägten handlungsorientierten Verarbeiten zu etwas mehr lagebezogenem Verarbeiten. (Aktionisten; zu schnell, weil wiederholt … zentrale Informationen vor dem Handeln nicht oder häufig für zutreffende Lösungen falsch erfasst werden)
- Ebenso bei zu ausgeprägtem lageorientiertem Verarbeiten Umschalten zu früherem ‚Abschluss' von Informationsbearbeitung, also lösungsbezogener Handlungsorientierung (Maßnahme: z. B. Stoppen des Infosuchens und Feststellens von Einzelfaktoren z. B. durch Nachhaken: „Welche zwei Elemente sind denn zentral?"; „Nee, nenne mal nur zwei"; „Konzentration auf weniger"). Bei der Lösung muss dann positiv rückgemeldet werden, dass der Schüler/die Schülerin sich

Informationsverarbeitung Beobachtungsmerkmale (6603)

Video: Personentypische Informationsverarbeitung (6620)

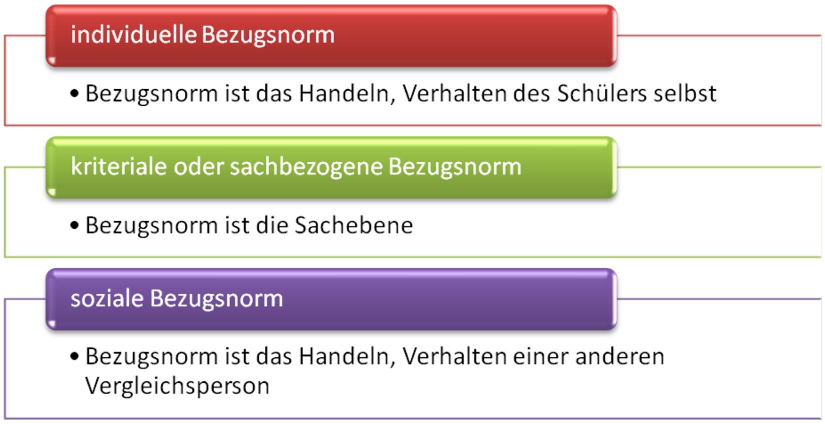


Abbildung 2.9: Bezugsnormen von Lehrenden im Unterricht, (angelehnt an Rheinberg und Engeser 2007)

> beschränkt und ‚umgeschaltet' hat. Eine reine inhaltliche Rückmeldung würde hier nicht ausreichen.

Für ein günstiges Arbeitsverhalten von Schülerinnen und Schülern wäre eine Positionierung der Informationsverarbeitung mit Schwerpunkt auf Handlungsorientierung wünschenswert.

2.4.6 Bezugsnorm bei Rückmeldungen beachten

Video: Rückmeldungen geben (6621)

Dass Rückmeldungen seitens der Lehrperson eine wichtige Rolle für Lernende spielen, ist in den vorangegangenen Punkten an unterschiedlichen Stellen bereits deutlich geworden.[16] In diesem Kapitel soll besonders die Rückmeldung zu persönlichen Kompetenzen der Schüler im Mittelpunkt stehen. Es ist hilfreich, wenn man sich als Lehrkraft über die Bezugsnorm der Rückmeldungen Gedanken macht.

Bezugsnorm bedeutet: In meiner Rückmeldung an eine andere lernende Person nehme ich als Bezug auf einen Wert, der dem Lernenden direkt bekannt ist. Die Ausprägung dieses Wertes nimmt meine Rückmeldung als Richtschnur, eben als Norm. Es gibt drei Bezugsnormen für die (Lehrer-)-Rückmeldung an Schülerinnnen und Schüler (Abbildung 2.9)[17].

Bei der *individuellen Bezugsnorm* nehme ich in meiner Rückmeldung Bezug nur auf das, was der Lernende selbst bisher gezeigt oder getan hat. Das, was er gemacht hat, ist mein Rückmeldebezug:

[16] s. Kapitel 2.4.2 Prozessbeteiligung stärken, Kapitel 2.4.4 Arbeitsmethoden als nutzbar zurückmelden und Kapitel 2.4.5 Personentypische Informationsverarbeitung – Umschaltfähigkeit fördern

[17] Zum Konzept der Bezugnormen ein Artikel von Falko Rheinberg: http://www.psych.uni-potsdam.de/people/rheinberg/files/MotivFoerdMotivatKompetenz.pdf.

„Gerade eben, das war sehr schön antizipiert. Du hast hinter den Zeichen viel schneller die Formel erkannt als noch vorhin!"

Bei der *sachbezogenen Bezugsnorm* hebe ich das als Bezug hervor, was die Ausführung hinsichtlich der Aufgabenstellung, z. B. Reihenfolge von Berechnungen, u. a. betrifft: „Noch mal, wie bist du gerade vorgegangen, du hast benannt, welche Teilschritte erforderlich sind."

Bei der *sozialen Bezugsnorm* wähle ich als Bezug andere Personen, die im gleichen Aufgabenfeld arbeiten: „Sieh mal zur Petra, sie hat die Schritte untereinander angeordnet und kann dadurch schrittweise prüfen, wo sich der Fehler eingeschlichen hat."

Für die individuelle Bezugsnorm gilt: Formen dieser Rückmeldung sollte man immer möglichst dann benutzen, wenn Lernende das, was sie ausführen sollen oder wollen, noch nicht so stabil gelernt haben, dass sie es zumindest in der Grobform in einfachen Situationen wiederholen können. Für den Schüler/die Schülerin wird sein/ihr persönlicher Lernzuwachs sichtbar gemacht, ohne permanent mit der Gruppe verglichen zu werden. Diese Form der Rückmeldung kann dadurch die Motivation von schwächeren bzw. unmotivierten Schüler fördern. Im Unterrichtsalltag ist mit dieser individuellen Rückmeldung für die Lehrkraft zunächst eine Mehrarbeit verbunden, die sich im Verlauf des Lernprozesses aber für beide Seiten lohnen kann. Wichtig ist auch, dass Lernschwächen, die über einen längeren Zeitraum bestehen, durch diese Art der Rückmeldung nicht ausgeblendet werden.

Individuelle und sachbezogene Bezugsnorm kombiniert man meistens unter der gleichen Bedingung wie oben beschrieben. Durch den sachbezogenen Rückmeldeanteil wird die Aufmerksamkeit zwar auf das Individuum, dort aber auf den Lern- oder Übungsgegenstand gelenkt. Die Schülerin/der Schüler bekommt eine direkte Rückmeldung zu ihren/seinen inhaltlichen Kompetenzen, also die Art ihres/seines bisherigen Umgangs (Kompetenz) mit ihnen (Sache, Gegenstand).

Sobald Ausführungen mindestens in der Grobform stabil reproduziert werden können, ist es dem Lernenden möglich, die eigene Könnensstufe/-ausprägung mit (sinnvoll) vergleichbaren Ausführungen anderer Schüler zu vergleichen (einordnen, (be)werten, in Relation stellen) oder sogar im Sinne von konkurrierender Anregung zu nutzen (Wettbewerb; besser sein/werden). Dies ist die Stunde der sozialen Bezugsnorm-Rückmeldung.

Es gilt also als Lehrkraft darauf zu achten, mit welcher Bezugsnorm welcher Schülerin/welcher Schüler angesprochen wird, um den Erhalt bzw. eine mögliche Steigerung ihrer/seiner Motivation zu erreichen. Neben der Beachtung der zweckmäßigen Bezugsnorm ist es für die Schülerinnen und Schüler wichtig, Rückmeldungen über den Wirkungszusammenhang zwischen ihrem Verhalten und dem Ergebnis ihrer Arbeit zu bekommen.

Im normalen Unterricht wird dabei der negative Wirkungszusammenhang viel häufiger hervorgehoben (z. B.: „Ohne Fleiß keinen Preis!"). Will man den Schüler ernst nehmen, dann muss man sein Arbeitsverhalten trainieren.

Dem Schüler werden dazu Selbstwirksamkeitserfahrungen auf der Sach- und Verhaltensebene ermöglicht: „Wie lernst du? Wie gehst du mit dir um?"; „Merkst du, dass das Ergebnis mit deiner Art zu lernen, …deiner Anstrengung, …deiner Zeitplanung etc. … zusammenhängt!?"; „Was und wie du's machst, das bringt das … hervor!" Bei älteren Schülern kann hier auch eine Selbstbeobachtung eingefordert werden, z. B. auf die für eine Prüfung investierte Zeit.

Selbstwirksamkeitserfahrung hebt das Selbstwertgefühl und fördert Selbstvertrauen. Wir machen diese Erfahrung, wenn wir eine Aufgabe lösen wollen/sollen, dies unter Einsatz unserer Ressourcen und verfügbaren Kompetenzen (in der Mehrzahl solcher Anforderungssituationen) dann auch erreichen: „ICH kann das!" Dass diese Wirksamkeitserfahrung entsteht (s. o. emotionaler Interessenaspekt), dafür bedarf es der Passung von Anforderung und Kompetenz des Schülers durch die Lehrperson. Solche Passungen erfolgen in den beschriebenen Lerngruppierungen der Schüler häufiger ‚automatisch'.

Lehrerinnen und Lehrer können Lernenden zuhören, wie sie Handlungsergebnisse oder Verhalten erklären, um abzuschätzen, ob sie sich für selbstwirksam (also kompetent, zuversichtlich motiviert) ansehen. Wo liegt die Ursache oder liegen die Ursachenfaktoren hauptsächlich, weshalb etwas gut oder schlecht gelaufen ist? Liegen sie in der Person des Schülers (intern) und wenn ja, sind es relativ stabile Ursachenfaktoren oder eher leicht veränderliche, variable Faktoren? Oder werden (schnell; immer wieder) Faktoren genannt, die außerhalb der Person des Schülers zu liegen scheinen? Die Tabelle in Abbildung 2.10 veranschaulicht vereinfacht diese Erklärungsfaktoren[18] noch einmal.

	[relativ] stabil	variabel
intern	Fähigkeit, Begabung, Talent, hoher Lernstand	Anstrengung, Stimmung, Konzentration, Spaß
extern	Aufgabenschwierigkeit; gegebene Umstände, z.B. Beleuchtung der Klasse	Glück, Zufall, Pech, vorgegebenes Tempo, vorm Fenster der Baggerlärm

Abbildung 2.10: Attributierung von HandlungsergebnissenQuelle s. Fußnote 18

Fehler, Missgeschicke, schlechte Noten werden von leistungsängstlicheren (geringes Selbstwertgefühl in der Sache oder gesamt) Schülern tendenziell häufiger und schneller mit internen/stabilen Faktoren erklärt (Beispiel: „Ich kann so was nicht"; „Ich bin ein schlechter Mathe-Schüler").

Erfolge, gute Darstellung oder (überraschende, auch kleinere) Fortschritte werden dagegen [dummerweise, weil ja selbstwert mindernd] mit externen Ursachen erklärt (z. B. „Ein blindes Huhn findet

[18] Das Modell der Ursachenzuschreibung von Handlungsergebnissen (Attribuierung) stammt in der hier genutzten Form von B. Weiner und geht auf Emotionstheorien von Heider zurück. Grundlegendes und Anschauliches legt eine Präsentation der Universität Gießen dar: http://www.allpsych.uni-giessen.de/knut/2006-ss06-seminar-emotion/Praesentationen/Weiner.pdf. Ein Buchauszug mit Mathematikbezug zeigt eine Anwendung der Theorie: http://www.hogrefe.de/programm/media/catalog/Book/978-3-8017-2014-8_lese.pdf.

auch mal ein Korn“; „Na, da hab ich ja endlich auch mal Glück gehabt“; „... der hat uns wieder nur verschachtelte Textaufgaben gegeben...“). Erfolge werden als zufälliges Glück gewertet.

Grundsätzlich brauchen Schülerinnen und Schüler eine Rückmeldung über ihre Kompetenzen. Deshalb ist es besser, wenn während des Arbeitsprozesses nach Mängeln, Fehlern eher variable Faktoren gewählt werden und sachgerecht aber dosiert Wechselwirkungen zu stabilen Faktoren. Bei Erfolgen, auch überraschenden sollten ebenfalls Wechselwirkungen zwischen internen Faktoren bevorzugt genutzt werden (auch in der Lehrerrückmeldung, um Wirksamkeitserfahrungen zu betonen: z. B. „Ne, ne nicht einfach Glück! Da steckt doch auch drin, dass du dich offensichtlich konzentriert hast und das, was du gelernt hast, richtig herausgeholt hast. Du hast das geschafft, merkst du das?...“). Selbstwirksamkeit lernen und dadurch den Selbstwert erhöhen, ist das Beste für die Motivation der Schülerinnen und Schüler.

2.4.7 Orientierungslosigkeit auflösen und Eigenverantwortlichkeit stärken

Die Funktionalität der Unterrichtsinhalte ist oft für Schülerinnen und Schüler nicht greifbar. Dies führt bei vielen zu Orientierungslosigkeit insbesondere bei fehlender Berufsperspektive. Schülerinnen und Schüler brauchen Ziele.

Abbildung 2.11: Vier Ebenen der Zielformulierung

Bei diesen Zielen unterscheidet man vier Ebenen (vgl. Abbildung 2.11). Dabei ist die Motivation, die durch die Zielsetzung erreicht wird, sehr unterschiedlich: Die stärkste Motivation geht von einem „will“-Ziel aus, die schwächste von „muss“-Zielen.

Schülerinnen und Schüler sollen sich also möglichst für eigene Ziele bewusst entscheiden. Dies kann man z. B. in Form von schriftlichen Zielvereinbarungen mit Unterschrift erreichen.

Wenn ein Schüler z. B. die Mitarbeit verweigert, führen Sie eine Entscheidungssituation herbei. Fordern Sie den Schüler z. B. auf, seine eigene Arbeitshaltung dieser Stunde vor der Klasse zu verbalisieren. Schülerinnen und Schülern, die weiterhin die Mitarbeit verweigern, könnte man die Möglichkeit geben, sich bis zur nächsten Stunde darüber Gedanken zu machen, ob sie eine gemeinsam formulierte „Zielvereinbarung“ unterschreiben möchten. Sie müssen sich dadurch überlegen, ob sie sich und ihre Entscheidungen selber ernst nehmen. Die Verantwortung für das eigene Handeln und die daraus erwachsenden Konsequenzen (evtl. auch Sanktionen) wird also an die Schülerin/den Schüler gegeben. Dieses Vorgehen wird für den Kurs öffentlich durchgeführt, so dass das Vorgehen Wirkung auf die anderen Schülerinnen und Schüler hat. Der Lernende formuliert durch die Unterschrift ein eigenes Ziel für die kommenden Stunden. Beide Seiten sollten über die Vereinbarung gemeinsam ins Gespräch kommen[19]. Die Erfahrung der Projektgruppe zeigte, dass Schülerinnen und Schüler in der kommenden Stunde sich häufig anders besannen.

Hilfreich für die Auflösung der Orientierungslosigkeit von Schülern kann auch ein Schülersprechtag sein, wie er bereits an einigen Schulen praktiziert wird, der von allen Lehrkräften der Schule getragen wird. Dabei werden für jeden Schüler einer Jahrgangsstufe individuelle Ziele vereinbart. Zur Motivationsförderung sind dabei kleine, möglichst vom Schüler (mit)formulierte Ziele wichtig, so dass ein Erfolgserlebnis erreicht wird, wenn und wie diese Ziele erreicht werden (Selbstkontrolle).

Im Vordergrund bei der Zielformulierung steht die Umverteilung der Verantwortlichkeit zwischen der Lehrkraft (der hilft, sich zu motivieren) und dem Lernenden (der motiviert sich). Da in der Regel Eigenverantwortlichkeit bei Schülern unterschiedlich stark ausgeprägt ist (nicht / nicht mehr / noch nicht oder zu gering), muss man diese Eigenverantwortlichkeit bewusst machen und fördern. Wie kann das gelingen?

Ein Schritt ist der Aufbau von Kontrollfähigkeit. Wer die Kontrolle verliert über sich und das, was er machen soll oder will (Kontrollverlust), der wird unsicher bis gelähmt oder leistet Widerstand. Er will die Kontrolle über sich und das Geschehen wiedererlangen. Dies ist also ein sehr starkes Motiv!

Beispiele:

- „Alle, die heute aktiv mitmachen wollen, setzen sich nach *innen*, die, die nur zuhören wollen, sitzen außen, *dürfen* aber auch nichts sagen!“

- „Was willst du jetzt machen? Möchtest du […]?“ (Die Initiative zum Planen und Handeln den Schülerinnen und Schüler zurückgeben.)

- Schülerinnen und Schüler fangen oft zu spät an, für Klausuren oder das Abitur zu arbeiten. Bewusstmachen des Zeitbedarfs und der eigenen Lernschwierigkeiten in einem frühen Stadium. Einen Einzelnen kann man herausfordernd vor die Entscheidung stellen: „Schaffst du das alleine? Bis wann kannst du das? Sollen wir Kontrollabschnitte verabreden?“ o.Ä.

Bei allen diesen Überlegungen ist die Persönlichkeitsentwicklung der Schlüssel zur Motivationsentwicklung. Dazu gehört auch, dass die Schülerin/der Schüler lernt, dass ihre/seine zum jetzigen Zeitpunkt investierten Mittel (Zeit, Anstrengung) vielleicht erst viel später sichtbare Ergebnisse bringen (Belohnungsaufschub).

2.5 Fazit

Die didaktische und psychologische Seite dieses Themas gemeinsam zu betrachten war für das SINUS-Set eine spannende und lohnende Sache. Dabei konnte das Konzept der interessendichten Situatio-

[19] Zum Thema schwierige Schüler und zum Punkt Externale Ursachenerklärung: Damm 2010 und http://www.marcus-damm.de/intern/pdf/11.pdf

nen bei der Planung von Unterrichtsszenarien helfen, die tatsächlich für die Schülerinnen und Schüler in den einzelnen Kursen zu situationalem Interesse führte. In beiden Szenarien stellte sich in allen Schülergruppen, die wir zur Erprobung des Materials gewinnen konnten, eine ausgesprochen gute Lernatmosphäre ein. Insbesondere die Möglichkeit, mathematische Zusammenhänge eigenständig und in einem angstfreien Raum zu entwickeln, führte bei einigen Schülerinnen und Schülern, gerade auch bei schwächeren, zu einem anderen Blick auf das Fach Mathematik. Diese Erfahrungen wirkten sich positiv auf die folgenden Stunden aus. In einer Schülergruppe gab es sogar spontanen Applaus am Ende der Stunde. Das hat man selten.

Um solche Unterrichtsszenarien zu entwickeln, war es für uns grundlegend neben der sozialen Interaktion und der mathematischen Wertigkeit, sich bei der Planung vor allen Dingen auf die drei Handlungen des Erkenntnisprozesses zu fokussieren: Sammeln-Verknüpfen-Struktursehen. Mit Hilfe dieses Modells für Erkenntnisprozesse sollte es gelingen auch für andere Unterrichtsgegenstände in der Oberstufe ähnliche Unterrichtsszenarien zu entwickeln.

Aus der psychologischen Perspektive ging es vor allen Dingen darum die Persönlichkeit der Schülerin/des Schülers weiterzuentwickeln um ihre/seine Motivation zu verbessern. Grundlage dafür sind hauptsächlich sinnvolle und wertschätzende Rückmeldungen an die jeweilige Schülerin/den jeweiligen Schüler. Nur so wird es gelingen schwächere und unmotivierte Lernende aus ihrem Teufelskreis des Misserfolges zu befreien. Hier wird man Zeit investieren müssen, wenn man diese Menschen fördern will.

2.6 Literaturliste

Achtziger, Anja und Peter M. Gollwitzer (2009). „Rubikonmodell der Handlungsphasen". In: *Handbuch der Allgemeinen Psychologie – Motivation und Emotion.* Hrsg. von Veronika Brandstätter und Jürgen H. Otto. 11. Göttingen: Hogrefe, S. 150–156.

Bikner-Ahsbahs, Angelika (2005). *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie 43*. Hildesheim und Berlin: Franzbecker.

Damm, Marcus (2010). *Schemapädagogik im Klassenzimmer – Ein neues Konzept zur Förderung verhaltensauffälliger Schüler*. 1. Aufl. Stuttgart: Ibidem-Verlag.

Deci, Edward (1998). „The Relation of Interest to Motivation and Human Needs. The Self-Determination Theory Viewpoint". In: *Interest and Learning*. Hrsg. von Lore Hoffmann u. a. Kiel: IPN, S. 146–164.

Deci, Edward und Richard Ryan (1993). „Die Selbstbestimmung der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik". In: *Zeitschrift für Pädagogik*. 39. Ser. 39.2, S. 223–238.

Hidi, Suzanne und Ann Renninger (2006). „The Four-Phase Model of Interest Development". In: *Educational Psychologist* (41(2)), S. 111–127.

Köller, Olaf (2005). „Bezugsnormorientierung von Lehrkräften: Konzeptuelle Grundlagen, empirische Befunde und Ratschläge für praktisches Handeln". In: *Motivationspsychologie und ihre Anwendung.* Hrsg. von Regina Vollmeyer u. a. Stuttgart: Kohlhammer, S. 189–202.

Krapp, Andreas (1992). „Konzepte und Forschungsansätze zur Analyse des Zusammenhangs von Interesse, Lernen und Leistung“. In: *Interesse, Lernen, Leistung. Neuere Ansätze der pädagogisch-psychologischen Interessenforschung.* Hrsg. von Andreas Krapp und Manfred Prenzel. Arbeiten zur sozialwissenschaftlichen Psychologie. 26. Münster: Aschendorff, S. 9–52.

Krapp, Andreas (1998a). „Die Bedeutung der Lernmotivation für die Optimierung des schulischen Bildungssystems“. In: *Politische Studien*. 54. Ser. (Sonderheft 3/2003), S. 91–105.

Krapp, Andreas (1998b). „Entwicklung und Förderung von Interessen im Unterricht. Psychologie in Erziehung und Unterricht“. In: *Psychologie in Erziehung und Unterricht* 45.3, S. 185–201.

Kubesch, Sabine (2008). *Körperliche Aktivität und exekuktive Funktionen*. 2. Auflage. Schorndorf: Hofmann GmbH & Company KG.

Kuhl, J. und M. Kazén (2003). „Diagnostik von Selbstkonzept und Motivation“. In: Hrsg. von J. Stiensmeier-Pelster und F. Rheinberg. Göttingen: Hogrefe. Kap. Handlungs- und Lageorientierung: Wie lernt man, seine Gefühle zu steuern?, S. 201–219. URL: http://www.femmessies.de/MessieSyndrom/messieinfo/HOLO-uni.pdf.

Lehwald, Gerhard. *özbf-Handreichungen zur Differenzierung von Lern-, Trainings- und Motivierungsprozessen. Beiträge zur Kompetenzerhöhung von Lehrpersonen. Die Checkliste zur Selbsterfassung von Bewertungstendenzen CSBT*. Hrsg. von Österreichisches Zentrum für Begabtenförderung und Begabungsforschung (özbf). URL: http://www.begabtenzentrum.at/wcms/picture/upload/File/Handreichungen/lehwald_Heft1_17_09_web.pdf.

Quirin, Markus und Julius Kuhl (2009). „Handlungskontrolltheorie“. In: *Handbuch der allgemeinen Psychologie - Motivation und Emotion*. Hrsg. von Veronika Brandstätter und Jürgen H. Otto. 1. Aufl. Göttingen: Hogrefe, S. 157–162.

Semmler-Ludwig, Regina (2001). „Beeinflussen Handlungs- bzw. Lageorientierung das Entscheidungsverhalten?“ In: *TUContact - Die Hochschulzeitschrift*. Bd. 9. Ausgabe. Der Rektor der Technischen Universität Clausthal, S. 18–21. URL: http://www.tu-clausthal.de/presse/tucontact/2001/Dezember/tuc1/11a.pdf (besucht am 13. 11. 2013).

Spitzer, Manfred (2002). *Lernen – Gehirnforschung und die Schule des Lebens*. Heidelberg und Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Stangl, Werner (2003). „Von der Unmöglichkeit zur Motivation in der Schule“. In: *Schulmagazin 5–10. Impulse für kreativen Unterricht*. 71. Ser. 1, S. 9–12.

Stiensmeier-Pelster, Joachim u. a. (1991). „Umfang der Informationsverarbeitung bei Entscheidungen: Der Einfluss von Handlungsorientierung bei unterschiedlich dringlichen und wichtigen Entscheidungen“. In: *Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie* 38.1, S. 94–112.

3 Individuelle Förderung im Mathematikunterricht: So geht's

Andreas Pallack, Rudolf vom Hofe und Alexander Salle

Diagnose und individuelle Förderung im Mathematikunterricht (6601)

Ziel unseres Projektes war es, Konzepte zur individuellen Förderung im Mathematikunterricht nach Möglichkeit nachhaltig, d. h. konzeptionell, zu verankern.

Es ergaben sich damit zwei Schwerpunkte: Die Entwicklung von geeigneten Materialien zur fachlichen Förderung sowie deren schulische Integration (siehe dazu auch Pallack und Trendel 2009) und Evaluation. Das Projekt wurde von fünf Schulen intensiv und aktiv getragen und begleitet: Der Karla-Raveh-Gesamtschule Lemgo, der Gertrud-Bäumer-Realschule in Bielefeld, dem Städtischen Gymnasium in Delbrück, dem Einstein-Gymnasium in Rheda-Wiedenbrück sowie der Bertolt-Brecht-Gesamtschule in Löhne. Geleitet wurde das Projekt vom Ministerium für Schule und Weiterbildung sowie dem Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) an der Universität Bielefeld.

3.1 Individuelle Förderung: Versuch einer Definition

Individuelle Förderung ist ein geflügeltes Wort. Man kann darunter alles und nichts fassen, seine Operationalisierung erfolgt vor Ort im Dialog mit den Beteiligten. Für ein Projekt, dessen Materialien landesweit genutzt werden sollen, reicht dieser Rahmen nicht aus. Wir stecken deswegen unseren Projektrahmen mit Hilfe von pragmatischen Definitionen ab. Einer Förderung geht notwendig immer eine Diagnose voraus. Die Einheit Diagnose und individuelle Förderung kann mit Blick auf das Lernen von Mathematik wie folgt näher gefasst werden:

> „Unter Diagnose verstehen wir in diesem Zusammenhang die gezielte Interaktion mit den Lernenden (zum Beispiel über Tests, aber auch über Gruppen- oder Partnerarbeit), deren primäres Ziel es ist, Entscheidungen für die Unterrichtsgestaltung begründet zu treffen. Individuelles Fördern soll Lernenden die Chance geben, ihr Potenzial umfassend zu entwickeln. Diagnose und individuelle Förderung bilden damit eine untrennbare Einheit. Diagnose ohne Förderung ist nutzlos; Förderung ohne Diagnose bedeutet Aktionismus.“ (vom Hofe und Pallack 2009, S. 209)

Notwendig fokussieren wir auf fachliche Förderung. Das Projekt hat nicht den Anspruch, besondere Situationen wie persönliche Krisen oder eine schwierige familiäre Situation auffangen zu können. Vielmehr stellt es ein fachliches Angebot für Mathematiklehrerinnen und -lehrer dar.

1. Mathe-Check	2. Mathe-Check
Test zu Beginn der Stufe 5	Test zu Beginn der Stufe 7
↓	↓
Module 5/6	**Module 7/8**
Rechnen mit elementaren Zahlen & Größen	Algebra
Bruchrechnung	Geometrie
Grundbegriffe der Geometrie	Lineare Funktionen
Flächeninhalt & Volumen	Prozentrechnung
Daten, Zufall & Zuordnungen	Rationale Zahlen
	Daten und Zufall
	Zuordnung

Abbildung 3.1: Materialübersicht

3.2 Individuelle Angebote für alle Lernenden

Kernlehrpläne Mathematik Gesamtschule SI (6602)

Mathematische Kompetenz entwickelt sich durch die Auseinandersetzung mit mathematikbezogenen Fragestellungen. Dabei sollen Lerngelegenheiten so gestaltet werden, dass Prozesskompetenzen erworben werden (siehe z. B. Kernlehrpläne Mathematik).

Wo setzen nun unsere Materialien zur Diagnose und individuellen Förderung an?

> „Ziel ist es, nicht nur Diagnose- und Fördermöglichkeiten für besonders leistungsschwache und -starke Schülerinnen und Schüler anzubieten, sondern individuelle Angebote für alle zu schaffen. Das Konzept setzt daher zum einen auf die Rolle des Lehrers als Koordinator des Unterrichts und zum anderen auf die Förderung der Eigenständigkeit der Schülerinnen und Schüler, die so ihre Fortschritte mehr und mehr selbst in die Hand nehmen." (wird 2014 veröffentlicht: Salle, vom Hofe und Pallack 2014, S. 20)

Beiträge zum Mathematikunterricht 2014 (6629)

Aufbauend auf dieser Idee wurden zum einen Eingangstests für die Jahrgangsstufen 5 und 7 entwickelt sowie Module für die Doppeljahrgangsstufen 5/6 und 7/8.

Die Module umfassen zum einen Beschreibungen zu Basiskompetenzen und Grundwissen – und darauf aufbauend Materialien zur Selbstdiagnose und die Förderaufgaben, die sogenannten Bielefelder Blüten. Die Eingangstests für die Jahrgangsstufen und die Module mit ihren Beschreibungen, Diagnose- und Fördermaterialien werden im Folgenden, jeweils verbunden mit Erfahrungen über ihren Einsatz, beschrieben.

3.3 Eingangsdiagnose

Im Rahmen des Projektes entstanden in Kooperation mit der Universität Bielefeld zwei Tests zur Eingangsdiagnose, die zu Beginn der Jahrgangsstufe 5 oder 7 eingesetzt werden können. Sie überprüfen einerseits Basiskompetenzen und Grundwissen, andererseits aber auch Konzepte, die schulisch erst noch behandelt werden. Diese Eingangsdiagnose verfolgt dabei nicht das Ziel, die Leistungen einzelner Schülerinnen und Schüler zu beurteilen, sondern vielmehr parallel unterrichtenden Lehrerinnen und Lehrern einen Einblick zu geben, was die Lernenden bereits können und mit welchem Vorwissen sie im Laufe der nächsten Zeit rechnen können. Die Eingangsdiagnose entlastet also den eigentlichen Unterricht und informiert über Anlässe zur Individualisierung. Die Abbildungen 3.2 und 3.3 auf Seite 34 zeigen zwei Aufgaben aus der Eingangsdiagnose für die Klasse 5.

Eingangstests und Auswertungsprogramm (6601)

Die Durchführung und Auswertung eines solchen Tests kostet notwendigerweise Zeit (Durchführung 60-70 Minuten, Auswertung rund 10 Minuten pro Test) und diese Zeit ist nur gut investiert, wenn die Ergebnisse zielführend zur Initialisierung des pädagogischen Diskurses zwischen Fachkollegen genutzt werden. Um dieses Ansinnen so gut wie möglich zu unterstützen, werden Programme zur effizienten Auswertung angeboten. Ein Beispiel hierzu zeigt die Abbildung 3.4.

Die Testergebnisse der Schülerinnen und Schüler von Lerngruppen werden in den getesteten Bereichen in Bezug zur getesteten Vergleichsgruppe gesetzt.

Abbildung 3.5 zeigt eine solche Auswertung von insgesamt drei (ausgewählten) Schülern. Die Auswertung erfolgt nach fünf inhaltlichen Bereichen aufgeschlüsselt: Grundrechenarten (GR), Grundbegriffe Geometrie (GG), Bruchrechnen (Br), Daten, Zufall und Zuordnungen (Zu) sowie Sachrechnen (SR).

Der horizontale Strich gibt dabei jeweils den Durchschnitt der Klasse an. An den linken Balken in der Abbildung, die allesamt oberhalb des Strichs liegen, lässt sich ablesen, dass die Leistungen des entsprechenden Schülers über dem Durchschnitt liegen, während die Leistungen des Schülers, der zum mittleren Balken gehört, vollständig unterhalb des Durchschnitts liegen. Im Bereich Bruchrechnung konnte dieser Schüler sogar überhaupt keine Aufgabe lösen.

An dieser Auswertung ist somit erkennbar, dass mit Blick auf die Bruchrechnung mit sehr unterschiedlichem Vorwissen gerechnet werden muss[1]. Die rechten Balken in dieser Auswertung, die im Bereich des Sachrechnen deutlich niedriger als in den anderen Bereichen sind, könnten auf einen Förderbedarf im Bereich des Textverstehens hindeuten, einem Spezifikum im Bereich Sachrechnens. Zusätzlich zu den schülerbezogenen Auswertungen gibt das Auswertungsprogramm Übersichten zu Klassen im Vergleich zur Jahrgangsstufe an.

Anhand der Ergebnisse der Auswertung können die Lehrkräfte im kollegialen Austausch herausfinden, ob Maßnahmen der äußeren Differenzierung notwendig sind und bei welchen Inhalten sie besonders sensibel vorgehen sollten.

Aufgrund von Rückmeldungen zu diesen Materialien können wir mit Sicherheit sagen, dass einige Schulen die beiden Diagnosetests regelmäßig einsetzen. Ein Teil dieser Schulen sieht die Eingangsdiagnose als eine Möglichkeit, den Lernenden unvoreingenommen zu begegnen. So bleiben sie an diesen Schulen sogar anonym, da es vor allem um die Leistung von Lerngruppen und nicht um eine Individualdiagnose geht.

[1] Bestimmte Methoden – wie das Lernen an Beispielen – sind besonders effizient, wenn wenig Vorwissen vorhanden ist. Die Eingangsdiagnose unterstützt Lehrkräfte bei der Unterrichtsplanung.

Bestimme eine passende Zahl für $\square$.

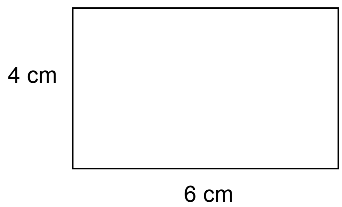
$4 + 4 \cdot \square = 16$

- ○ 1
- ○ 2
- ○ 3
- ○ 4

Abbildung 3.2: Aufgabe zum Grundwissen aus dem Bereich Arithmetik

Das Bild zeigt ein Rechteck mit der Länge 6 cm und der Breite 4 cm.

a) Bestimme den Umfang des Rechtecks.



b) Bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks.

Abbildung 3.3: Aufgabe mit Inhalten der Doppeljahrgangsstufe 5/6

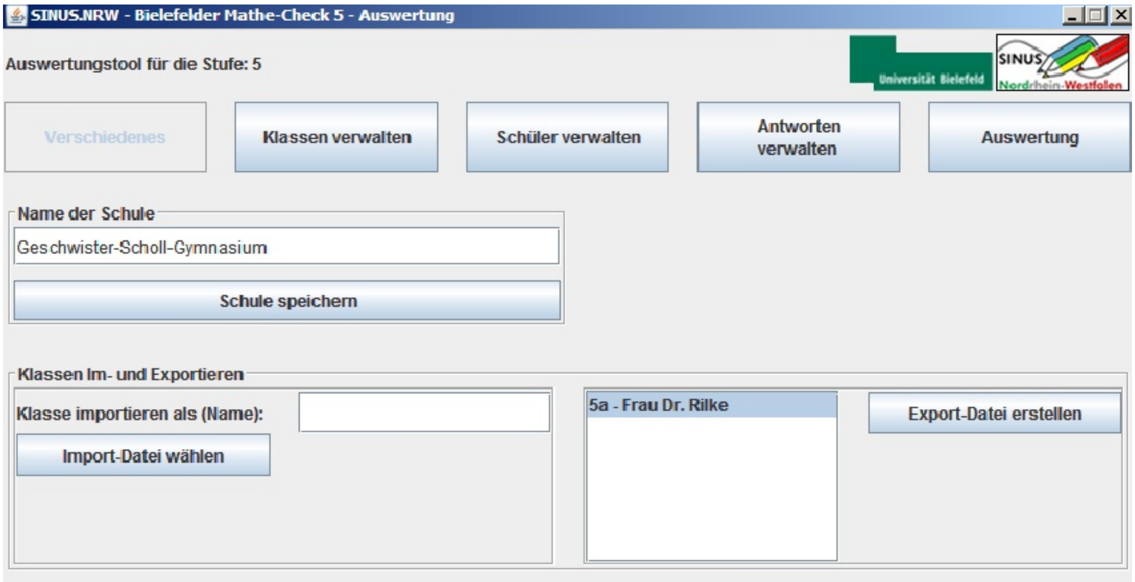


Abbildung 3.4: Ein Programm unterstützt Lehrkräfte bei der Auswertung

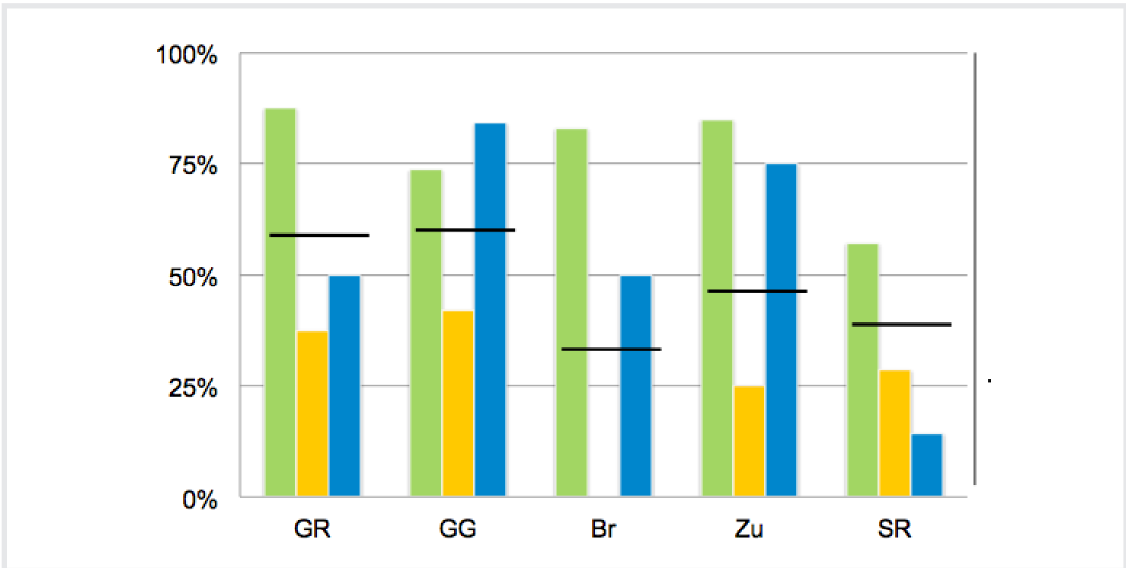


Abbildung 3.5: Auswertung von drei Schülern zu den Bereichen Grundrechenarten (GR), Grundbegriffe Geometrie (GG), Bruchrechnen (Br), Daten, Zufall und Zuordnungen (Zu) sowie Sachrechnen (SR)

Viele andere Schulen haben den Test einmalig erprobt. Das liegt wahrscheinlich auch daran, dass kooperative Unterrichtsentwicklung (vgl. Pallack 2009) trotz ihrer erwiesenen Wirksamkeit kaum verbreitet ist und jahrgangsübergreifend eine echte Herausforderung darstellt.

3.4 Aufbau und Inhalt der Module

Sämtliche Modulbeschreibungen

Die Module fokussieren auf Inhalte und nicht auf Prozesse. Der Grund dafür ist einfach: Grundwissen und Basiskompetenzen liegen primär im inhaltlichen Bereich (siehe dazu auch Drüke-Noe u. a. 2011); sie stellen eine Auswahl der Kompetenzerwartungen der Kernlehrpläne dar. Mit dieser Blickrichtung wurden die Modulbeschreibungen entwickelt. Ausgehend von den Kernlehrplänen wurde eine Auswahl von Kompetenzerwartungen getroffen. Diese wurden schließlich in „Ich kann …"-Formulierungen operationalisiert. Die hieraus resultierenden Modulbeschreibungen sind die Grundlage zur Entwicklung der Materialien. In Tabelle 3.1 ist ein Ausschnitt einer Modulbeschreibung dargestellt, weitere Modulbeschreibungen können den Internetseiten zu diesem Artikel entnommen werden.

3.5 Selbsteinschätzungs- und Selbstüberprüfungsbögen

Selbsteinschätzungsbögen greifen die operationalisierten Basiskompetenzen sowie das Grundwissen aus den Modulbeschreibungen auf und übersetzen es in für Lernende nachvollziehbare Aussagen zur Selbsteinschätzung (vgl. Abbildung 3.6). Zu jeder nachvollziehbaren Aussage gehört im

Kompetenzen laut Kernlehrplan Die Schülerinnen und Schüler …		**Grundwissen und Basiskompetenzen** Ich kann …
Anwenden	berechnen Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert in Realsituationen (Zinsrechnung)	• Anteile von Flächen in Prozent angeben.
		• Prozente als Anteile von Flächen darstellen.
		• Prozente in Diagrammen (Kreis- und Streifendiagramme) darstellen.
		• die Grundbegriffe der Prozentrechnung (Grundwert, Prozentwert, Prozentsatz) erklären.
		• den Prozentwert, den Grundwert und den Prozentsatz berechnen.
		• die Begriffe der Prozentrechnung auf die Zinsrechnung übertragen.
		• aus Sachaufgaben Angaben entnehmen, die man zum Rechnen braucht.
		• die prozentuale Verminderung / Erhöhung in Realsituationen berechnen.
		• den Prozentsatz bei vermehrtem/vermindertem Grundwert berechnen.
		• die Jahreszinsen in Sachsituationen berechnen.
		• die Tages- / Monatszinsen in Sachsituationen berechnen.
		• das Kapital in Sachsituationen berechnen.
		• den Zinssatz in Sachsituationen berechnen.

Tabelle 3.1: Modulbeschreibung zum Bereich Prozentrechnen

Modulbeschreibung Prozentrechnung (6612)

	Ich kann...	ganz sicher	ziemlich sicher	nur unsicher	sehr unsicher	Beispiel-aufgaben
1	Ich kann Beispiele beschreiben, bei denen man Prozentrechnung braucht.					*Mathebuch, S. 22 Nr. 3,6*
2	Ich kann Anteile als Bruchteile, als Dezimalzahlen und als Prozentsätze schreiben und vergleichen.					*Freiarbeits-material, Blatt 3*
3	Ich kann Anteile von Flächen in Prozent angeben.					
4	Ich kann Prozente als Anteile von Flächen darstellen.					

Abbildung 3.6: Selbsteinschätzungsbogen mit musterhaft ausgefüllten Beispielaufgaben

Selbsteinschätzungsbogen ein Feld mit Beispielaufgaben. Kann eine Formulierung in der Fragestellung nicht gedeutet werden, besteht durch den Verweis auf Beispielaufgaben Zugriff auf eine illustrierende Aufgabe.

Dieses Feld der Beispielaufgaben ist in den veröffentlichten Bögen nicht ausgefüllt, da den Projektbeteiligten die exponierte Rolle des Schulbuchs bewusst war und ist. Zur Illustration wurden keine neuen Aufgaben entwickelt, sondern hier wird, abhängig vom eingeführten Lehrbuch und dem vorausgegangenen Unterricht, auf bereits vorhandene Aufgaben verwiesen. Dies bleibt daher eine Aufgabe innerhalb der Schule.
Der Umgang mit der Spalte „Aufgabenbeispiele" bietet zudem die Möglichkeit, die Schülerinnen und Schüler zu mehr Eigenverantwortung im Umgang mit dem eigenen Lernen zu bewegen, indem passende Aufgaben begleitend zum Unterricht herausgesucht oder gesammelt werden.

Passende Ergänzungen zu den Selbsteinschätzungsbögen sind die Selbstüberprüfungsbögen, die anstelle von Aussagen zur Selbsteinschätzung Aufgabenstellungen enthalten (Abbildung 3.7).

In den Selbstüberprüfungsbögen bearbeiten Lernende Aufgaben zu Basiskompetenzen und zum Grundwissen. Die meisten Aufgaben können sie selbstständig (mit den ebenfalls im Projekt erstellten Lösungen) auswerten und auf dieser Basis mit oder ohne die Lehrkraft Entscheidungen für das weitere Lernen treffen.

Auch in diesen Bögen gibt es eine leere Spalte zu weiteren Übungsaufgaben. Hier können Übungsaufgaben aus dem Buch oder – im Rahmen zunehmender Selbstständigkeit – Verweise auf Kapitel oder Seitenzahlen von den Lernenden vorgenommen werden.

Zu diesem Material liegen umfassende Praxiserfahrungen vor, die zeigen, dass es keinen einheitlichen Einsatz zur Nutzung des Materials gibt. Einige Lehrkräfte nutzen nur die Selbsteinschätzungsbögen. Andere verwenden nur die Aufgaben zur Selbstüberprüfung als heimische Übungsaufgabe.

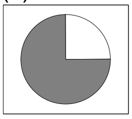
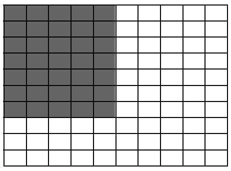
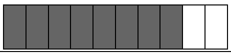
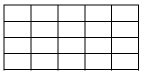
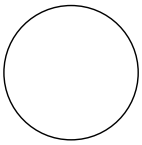
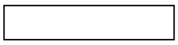
1) Prozente im Alltag	**r**	**f**	**Übungen**
a) Gib 3 Beispiele an, bei denen man die Prozentrechnung im Alltag benötigt.			
b) Gib den Prozentsatz der dunklen Fläche an. (1)  (2)  (3) 			
c) (1) Markiere 40 %.  (2) Markiere 30 %.  (3) Markiere 75 %. 			

Abbildung 3.7: Aufgaben zur Selbstüberprüfung

In manchen Fällen sind die Selbsteinschätzungsbögen Teil eines Portfolios, das regelmäßig gemeinsam mit der Lehrkraft und den Eltern gesichtet wird, manchmal sind selbige anonym in der Hand der Lernenden. Sie entscheiden dann auch, ob der Lehrkraft Einblick gewährt wird oder nicht.

Erfahrungsbericht des Gymnasium Delbrück (6584)

Besonders erfolgreich in der Umsetzung dieser Materialien war das Gymnasium Delbrück: Dort wurde eine Handreichung zum Einsatz des Materials entwickelt und der Einsatz der Selbsteinschätzungsbögen und Selbstüberprüfungsbögen regelmäßig in der Fachkonferenz diskutiert. An dieser Schule wurden die Materialien sogar für alle Jahrgangsstufen (einschließlich der Oberstufe) entwickelt und sie werden mit zunehmenden Eigenverantwortung für die Schülerinnen und Schüler gewinnbringend eingesetzt.

3.6 Bielefelder Blüten

Dieses Aufgabenformat fällt gegenüber den gerade vorgestellten deutlich aus dem Rahmen: Die Bielefelder Blüten bestehen stets aus vier Teilaufgaben mit verschiedenen Charakteristika (vgl. Abbildung 3.8): Es ist eine einfache Aufgabe zum Vorwärtsarbeiten dabei. Eine Aufgabe ist bewusst offen gestellt, in einer müssen die Lernenden rückwärts arbeiten und in einer komplexeren Aufgabe werden vielfältige Strategien zur Lösung benötigt. Das Besondere an den Blütenaufgaben ist, dass den Teilaufgaben nicht anzusehen ist, um welchen Aufgabentyp es sich handelt. Die Bezeichnung

„Blüte“ geht auf Schupp (2002) zurück und ist ein Gegenkonzept zum verengenden didaktischen Trichterschemata.

Statt der üblichen Anordnung (a), b), c), d)) wurden hier Symbole von Spielkarten gewählt. Ihr einziger Zweck ist es, die Aufgabe benennen zu können (z. B. die Aufgabe Herz); es ist keine hierarchische Einordnung damit verbunden.

Die Aufgaben wurden von sehr vielen Schulen erprobt, weswegen mittlerweile eine Vielzahl von Erfahrungsberichten vorliegt. Viele Fach- und Schulleiter konnten den Einsatz solcher Aufgaben bereits in Examensprüfungen beobachten – dieser Aufgabentyp erfreut sich in Nordrhein-Westfalen wachsender Beliebtheit. Besonders hinweisen möchten wir auf die Erfahrungen der Karla-Raveh-Gesamtschule. Dort wurden selbstregulierende Lernarrangements entwickelt und dieser Aufgabentyp curricular festgeschrieben.

Erfahrungen der Karla-Raveh-Gesamtschule (6600)

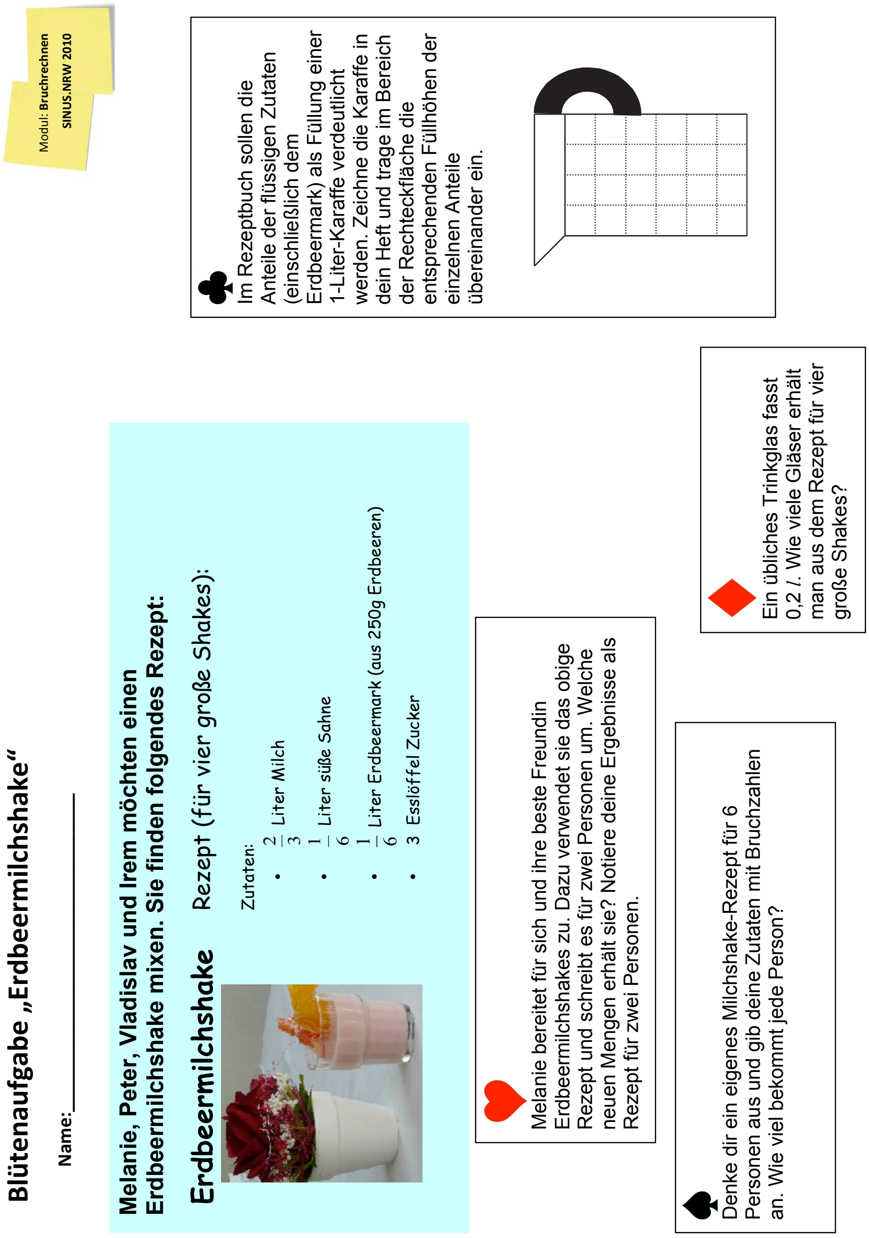
Bereits die Vorerprobung zeigte, dass das Potenzial dieser Aufgaben immens ist. Da der Schwierigkeitsgrad nicht erkennbar ist, wählen Lernende nach anderen, natürlich primär subjektiven Kriterien aus.

Damit verbunden ist die Chance, Lernenden immer wieder niedrige Einstiegshürden zu bieten und ihr Interesse ernst zu nehmen. Salle, vom Hofe und Pallack (2014)[2] präsentieren eine erste systematische Auswertung. Unter kontrollierten Bedingungen wurde die Blütenaufgabe Erdbeermilchshake an den fünf Projektschulen bearbeitet. Gemessen wurde der subjektive Schwierigkeitsgrad der Teilaufgaben (siehe Abbildung 3.10). Das linke Diagramm ist wie folgt zu lesen: Die Lernenden wurden befragt, welche Aufgabe sie für die leichteste und welche sie für die schwerste halten. Daraus ergibt sich eine Position im Diagramm. Wenn ein Schüler die Aufgabe zum Rückwärtsarbeiten als schwerste und die komplexe Aufgabe als leichteste gewählt hat, wird das durch einen Eintrag in der zweiten Zeile und der vierten Spalte vermerkt. Die Größen der Kreise illustrieren die Anzahl der Schüler, die diese Wahl trafen – die Zahlen geben die Anzahl an. Im rechten Teil der Abbildung wird Zustimmung (++ und +) und Ablehnung (− und −−) visualisiert.

Die Aufgabe zum Rückwärtsarbeiten wurde von vielen Schülern als die einfachste Aufgabe angesehen. Spannend ist jedoch hier, dass die Lernenden, die diese Aufgabe als leichteste einschätzten, recht gleichverteilt eine der verbleibenden drei Teilaufgaben als schwerste einschätzten. Ähnliches gilt für die anderen Einschätzungen. Was als leicht oder schwer empfunden wird, kann also mit Blick auf die Gesamtheit nicht oder zumindest nur sehr grob gesagt werden. Die Antworten streuen zu stark.

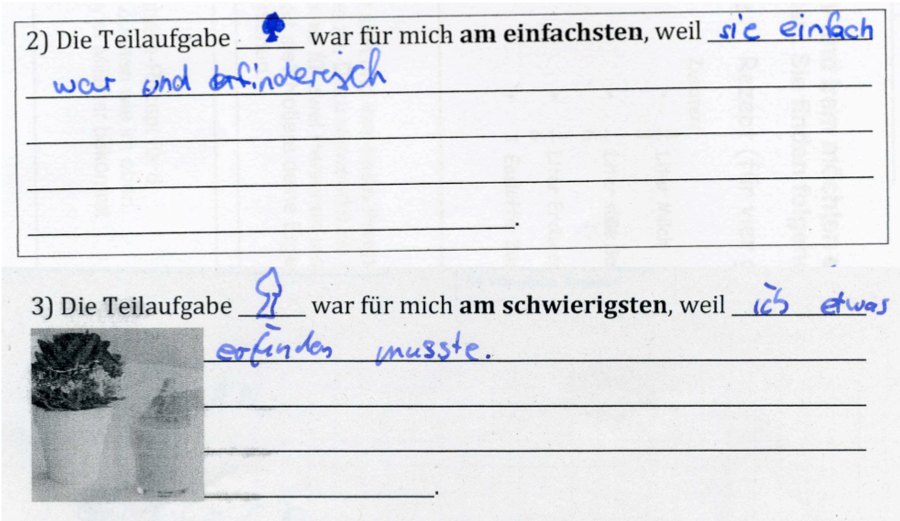
Die Beurteilung des Aufgabentyps fällt beeindruckend eindeutig aus: Über 80% schätzen es als positiv ein, dass die Aufgaben nicht in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet waren, die Kontrollfrage bestätigt das Ergebnis im Wesentlichen.

[2] Der Artikel erscheint Anfang 2014.



Blütenaufgabe Erdbeermilchshake (6611)

Abbildung 3.8: Die Blütenaufgabe „Erdbeermilchshake“


2) Die Teilaufgabe ____ war für mich **am einfachsten**, weil sie einfach war und erfinderisch

3) Die Teilaufgabe ____ war für mich **am schwierigsten**, weil ich etwas erfinden musste.

Abbildung 3.9: Schüler schätzen den Schwierigkeitsgrad von Aufgaben ein.

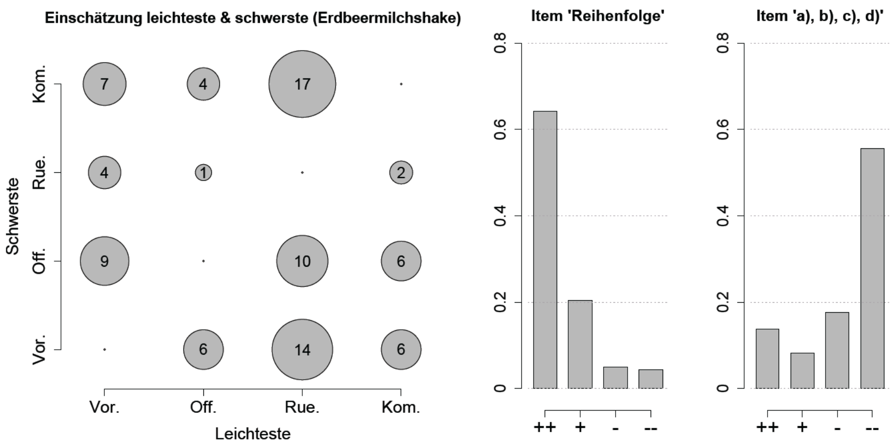


Abbildung 3.10: Erste Evaluationsergebnisse (wird 2014 veröffentlicht: Salle, vom Hofe und Pallack 2014)

Beiträge zum Mathematikunterricht 2014 (6629)

> „Die untersuchten Schülerinnen und Schüler unterscheiden sich hochgradig bei der Schwierigkeitsbewertung der Teilaufgaben und begründen dies mit vielfältigen Argumenten. Weiterhin befürworten sie die freie Aufgabenauswahl und sprechen sich größtenteils gegen eine hierarchische Anordnung aus. Dieses Ergebnis zeigt, dass Schülerinnen und Schüler die Gestaltung ihres Lernprozesses in diesem Rahmen wertschätzen." (wird 2014 veröffentlicht: Salle, vom Hofe und Pallack 2014)

Sowohl die Rückmeldung aus der Praxis wie auch die systematische Erhebung zeigen, dass mit den Bielefelder Blüten ein Aufgabentyp gefunden wurde, der Lehrerinnen und Lehrer wie auch Schülerinnen und Schüler gleichermaßen anspricht. Die Einsatzszenarien sind vielfältig und lassen Lehrkräften hinreichend Freiheit auf Spezifika ihrer Lerngruppe einzugehen.

3.7 Materialüberblick Doppeljahrgangsstufe 5/6

Im Rahmen dieses Projektes wurde für die Jahrgangsstufe 5/6 eine Eingangsdiagnostik mit Test, Durchführungsanleitung und Auswertungstool entwickelt. Darüber hinaus wurden folgende Module zur Diagnose und Förderung entwickelt, die neben den angegebenen Blütenaufgaben jeweils eine Modulbeschreibung, einen Selbsteinschätzungsbogen und einen Selbstüberprüfungsbogen mit Lösungen enthalten.

Modul Bruchrechnung Blütenaufgaben (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ Haustiere; Naschkatze; Schilderwald; Erbeermilchshake

Modul Daten, Zufall & Zuordnungen Blütenaufgaben (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ Fahrradüberprüfung; Schüler kennenlernen; Schuhgrößen

Modul Flächeninhalt & Volumen Blütenaufgaben (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ DIN A4 & Co; Klinker; Schwimmbad; Wangerooge

Modul Geometrie Blütenaufgaben (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ Schatzsuche; Flächenverdopplung; Flaggen; Räumliche Wahrnehmung; Schwimmbad

Modul Rechnen mit elementaren Zahlen und Größen Blütenaufgaben (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ Nordseeurlaub; Wiegen; Adler-Lok; Elefanten; Fahrrad; Schokolade

3.8 Materialüberblick Doppeljahrgangsstufe 7/8

Auch für die Doppeljahrgangsstufe 7/8 wurde im Rahmen dieses Projektes eine Eingangsdiagnostik mit Test, Durchführungsanleitung und Auswertungstool entwickelt. Darüber hinaus wurden folgende Module zur Diagnose und Förderung entwickelt, die neben den angegebenen Blütenaufgaben jeweils eine Modulbeschreibung, einen Selbsteinschätzungsbogen und einen Selbstüberprüfungsbogen mit Lösungen enthalten.

Modul Algebra Blütenaufgaben (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ Familie Müller; Telefontarife; Fuchs und Hase; Schnee

Modul Geometrie Blütenaufgaben (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ Dachausbau; Hochbeet; Vogelhäuschen; Schnee

Modul Lineare Funktionen Blütenaufgabe (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ Celsius und Fahrenheit

Modul Prozentrechnung Blütenaufgaben (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ Alles muss raus; Freizeit und Medien

Modul Rationale Zahlen Blütenaufgaben (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ MP3-Player; New York; Temperaturangaben; Wetterkarte; Zeitrechnung

Modul Stochastik, Statistik Blütenaufgaben (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ Roulette; Boxplot; Lego

Modul Zuordnungen Blütenaufgaben (Aufgabenstellung und Aufgabenprofil):
→ Geländespiel; Klassenausflug; Laufen

3.9 Zusammenfassung und Fazit

Individuelle Förderung muss primär vor Ort mit Blick auf die individuellen Bedürfnisse von Lernenden geplant und initiiert werden. Die Materialien aus diesem Projekt sind ein umfangreiches, ausführlich erprobtes Angebot zur Unterstützung von Lehrkräften bei der Bewältigung dieser Aufgabe. Besonders wirksam wird das Angebot, wenn es nicht beim gelegentlichen Einsatz bleibt. Die Sicherung von Basiskompetenzen und Grundwissen ist eine Aufgabe aller Lehrkräfte an Schulen. Eine systematisch gestaltete kooperative Unterrichtsentwicklung schafft dabei gute Voraussetzungen für das Gelingen dieser Aufgabe. Eine notwendige Voraussetzung hierfür ist eine professionelle Fachkonferenzarbeit.

3.10 Literaturliste

Drüke-Noe, Christina u. a. (2011). *Basiskompetenzen Mathematik*. Cornelsen-Verlag.

Hattie, John, Wolfgang Beywl und Klaus Zierer (2013). *Lernen sichtbar machen*. Überarbeitete deutschsprachige Ausgabe. Schneider Verlag.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen, Hrsg. (2004). *Kernlehrpläne für die Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen Mathematik*. Ritterbach Verlag.

Pallack, Andreas (2009). „Unterricht gemeinsam entwickeln". In: *Mathematik lehren* 152, S. 4–10.

Pallack, Andreas und Georg Trendel (2009). „Neue Perspektiven für die Fachgruppenarbeit". In: *Schulverwaltung* 7.2009, S. 202–204.

Salle, Alexander, Rudolf vom Hofe und Andreas Pallack (2011). „Fördermodule für jede Gelegenheit. SINUS.NRW-Projekt Diagnose & individuelle Förderung". In: *Mathematik lehren* 166, S. 20–24.

Salle, Alexander, Rudolf vom Hofe und Andreas Pallack (2014). „Differenzierter Unterricht mit Blütenaufgaben". In: *erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht*. URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2014/.

Schupp, Heinz (2002). *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariationen im Mathematikunterricht*. Franzbecker-Verlag.

Steffens, Ulrich und Dieter Höfer (2013). *Lernprozesse sichtbar machen - John Hatties Forschungsarbeiten zu gutem Unterricht. Welche Relevanz haben sie für Schulen in Deutschland?* URL: http://www.visiblelearning.de.

Vom Hofe, Rudolf und Andreas Pallack (2009). „SINUS-Diagnose und individuelle Förderung im Mathematikunterricht". In: *Schule NRW* 08/09, S. 390–392.

4 MAfiSuS – Mathematische Angebote für interessierte Schülerinnen und Schüler

Kommentierte Zusammenstellung motivierender mathematischer (Wettbewerbs-)Aufgaben und mathematisierender Kontexte zur Gestaltung von Angeboten im Ganztag und im Unterricht für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler.

Michael Rüsing

Teilnehmer des Projektes

Michael Rüsing (B.M.V.–Schule, Essen)
Thomas Giebisch (Leibniz-Gymnasium, Remscheid)
Gaby Heintz (ZfsL, Neuss)
Steffen Heyroth (Leibniz-Gymnasium, Essen)
Matthias Lippert (Röntgen-Gymnasium, Remscheid)
Ellen Voigt (Gymnasium Bayreuther Straße, Wuppertal)

4.1 Grundlagen des Projektes

MafiSuS (6674)

Individuelle Förderung bedeutet, alle Schülerinnen und Schüler entsprechend ihrer individuellen Bedürfnisse zu fördern. Im Sinne einer stärkenorientierten Förderung haben auch mathematisch besonders interessierte Schülerinnen und Schüler einen Anspruch auf eine ihren Bedürfnissen entsprechende Förderung. In diesem Projekt wurden Materialien zusammengestellt, die dies ermöglichen. Dabei sind sowohl Förderangebote im Rahmen von Angeboten im Nachmittagsbereich (sog. Arbeitsgemeinschaften) von (Ganztags-)Schulen als auch Förderangebote innerhalb des normalen Mathematikunterrichts mit einem besonderen Blick auf die gezielte Förderung leistungsstarker und interessierter Schülerinnen und Schüler ins Auge gefasst worden.

Um eine möglichst effektive und zielgerichtete Förderung mit einem Minimum an Recherche zu ermöglichen, wurde in diesem Projekt eine Auswahl existierender Materialien zusammengestellt, ergänzt und kommentiert. Die zusammengestellten Aufgaben sind in thematischen Einheiten zusammengefasst, so dass sie zielgerichtet und vertiefend auch parallel oder ergänzend zum Unterricht eingesetzt werden können. Durch die Kommentierung der Arbeitsmaterialien ist eine an dem individuellen Leistungsstand, der Begabung und Ausdauer der Schülerinnen und Schüler orientierte Auswahl von Aufgaben bzw. Hilfestellungen leicht möglich. Insbesondere kann zum Beispiel im Rahmen von Ganztagsangeboten auch ein Jahrgangsstufen übergreifender Einsatz erfolgen.

Die Bandbreite der Angebote, die in diesem Projekt zusammengestellt wurden, reicht von kommentierten Aufgaben aus Mathematik-Olympiaden über Anwendungskontexte bis hin zu praktisch erfahrbaren und dennoch leicht organisierbaren kleineren Projekten. Der Schwerpunkt der zusammengestellten Einheiten liegt auf der Doppeljahrgangsstufe 5/6. Darüber hinaus konnten aber auch Einheiten für die Jahrgangsstufen 7/8 entwickelt werden.

Die Arbeitsgruppe dieses SINUS-Projektes setzt sich aus Mitgliedern des Landesverbandes „Mathematikwettbewerbe NRW" zusammen, der unter anderem die Landesrunde der Mathematikolympiade in Nordrhein-Westfalen ausrichtet. Ein besonderer Dank geht an den Verein „Mathematik-Olympiade", der die Aufgaben der Olympiade entwickelt und die Erlaubnis gegeben hat, seine Aufgaben zu verwenden.

Im Folgenden werden zunächst die im Projekt gesammelten Erfahrungen zur Gestaltung eines Förderangebots vorgestellt. Anschließend werden aus den Materialien des Projektes mehrere Aufgaben- und Materialienbeispiele für verschiedene Phasen des Förderangebots dargestellt.

4.2 Gestaltung einer Fördersitzung im Rahmen einer AG

Bei Förderangeboten, die zum Beispiel im Rahmen einer AG regelmäßig in festen Zeitfenstern organisiert sind, bietet es sich an, jede AG-Sitzung klar zu strukturieren. Eine solche Struktur ermöglicht insbesondere jüngeren Schülerinnen und Schülern, sich im gesetzten Zeitrahmen zu orientieren. Bei den am Projekt beteiligten Kolleginnen und Kollegen hat sich für eine typische AG-Sitzung von 90 Minuten die folgende Struktur als vorteilhaft erwiesen:

i „Warm-up" mit einer kurzen Denk- oder Knobelaufgabe, etwa 10 Minuten lang,
ii „Hauptteil" mit thematischer Arbeit, praktisch oder theoretisch, etwa 60 Minuten lang,
iii „Ausklang" mit mathematischen Spielen, etwa 20 Minuten lang.

Die Einteilung der AG-Sitzung in drei Phasen bietet den Vorteil, dass mit einer gemeinsamen, aktivierenden Knobel- oder Denkaufgabe ein deutlicher Startpunkt festgelegt wird. Der anschließende thematische Schwerpunkt kann in unterschiedlichen Arbeitsformen stattfinden und enthält ggf. auch einen Austausch über die Ergebnisse bzw. einen Bericht über Zwischenstände. In der dritten Phase führen unterschiedliche mathematische Spiele die Gruppe wieder zusammen und runden das Treffen ab.

Die angegebenen Zeitvorschläge können bei einer anderen AG-Dauer unter Beibehaltung der drei Phasen entsprechend angepasst werden. Da kreative Prozesse und problemlösendes Arbeiten allerdings teilweise viel Zeit in Anspruch nehmen, sollte der Zeitrahmen für eine Fördersitzung nicht unter 45 Minuten gewählt werden. Gute Erfahrungen wurden diesbezüglich mit den oben dargestellten 90 Minuten gemacht. Der Ablauf der drei Phasen wird im Folgenden an ausgewählten Beispielen und Materialien vorgestellt. Ergänzendes Material findet sich auf den Webseiten des SINUS-Projektes unter www.sinus.nrw.de.

www.sinus.nrw.de

Die nachfolgenden Ausführungen beziehen sich stets auf 90-minütige Einheiten.

4.3 Beispiele für die „Warm-up“-Phase

Diese erste Phase der Sitzung dient der Einstimmung der Schülerinnen und Schüler, die eventuell direkt aus der Mittagspause oder einem anderen Unterricht in die AG kommen. In dieser Phase soll mit Hilfe kleiner Aufgaben die Konzentration auf die mathematischen Inhalte gesteigert und eine gute Arbeitsatmosphäre erzeugt werden. In der Regel reicht hierzu eine Aufgabe pro AG-Sitzung aus, je nach Zusammensetzung der Gruppe sind jedoch in einigen Fällen auch zwei oder drei Aufgaben pro Sitzung empfehlenswert.

In der "Warm-up"Phase können Denk- und Knobelaufgaben eingesetzt werden. Gute Erfahrungen wurden in dieser Phase mit dem Einsatz von sogenannten „black stories“ gemacht, die im Moses-Verlag unter diesem Namen erschienen sind (http://www.moses-verlag.de/). Dabei handelt es sich zwar nicht direkt um mathematische Problemstellungen, zur Lösung ist jedoch logisches Denken und zielgerichtetes Fragen erforderlich. Auf der Vorderseite einer Spielkarte ist jeweils eine Situation geschildert, die von der Lehrkraft oder der Spielleitung (das kann auch ein/e Schüler/in sein) vorgelesen wird. Die Schülerinnen und Schüler versuchen gemeinsam im Plenum, die auf der Rückseite

black stories (6613)

Vorderseite einer Spielkarte mit der Situationsschilderung

Rückseite der Spielkarte mit der Entstehung der Situation

Abbildung 4.1: „black stories“-Spielkarte abgedruckten Umstände herauszufinden, die zu der Situation geführt haben. Dabei stellen die Schülerinnen und Schüler Fragen, die durch die Lehrkraft oder die Spielleitung immer nur mit „ja“ oder „nein“ beantwortet werden. Ein Beispiel hierzu zeigt die Abbildung 4.1.

Die „black stories“ sind in der „Warm-up“-Phase geeignet, da sie als Einstieg sehr gut Jahrgangs übergreifend mit allen gespielt werden können. Um den angestrebten Zeitrahmen der „Warm-up“-Phase nicht zu überschreiten, kann die Spielleitung, falls dies erforderlich ist, durch dezente Hinweise die Lösung der Situation beschleunigen. Darüber hinaus können „black stories“ auch als Ausklang am Ende einer Sitzung verwendet werden.

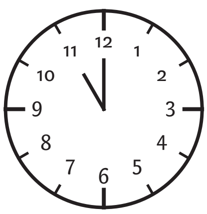
Knobelaufgaben

Natürlich können auch weitere leichte Denk- und Knobelaufgaben in der „Warm-up“-Phase eingesetzt werden. Hierfür gibt es eine Fülle von Aufgaben, die den Kolleginnen und Kollegen bekannt sein dürften. Da diese Aufgaben entweder individuell oder in kleinen Gruppen bearbeitet werden, muss hier insbesondere bei der Gruppe der mathematisch interessierten Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlich schnellen Bearbeitungen gerechnet werden. Diesem Umstand kann damit Rechnung getragen werden, dass die Schülerinnen und Schüler in dieser Phase zwei (oder drei) Aufgaben zur Verfügung gestellt bekommen, von denen sie eine auswählen und bearbeiten. Schnellere Schülerinnen und Schüler können dann eine zuvor nicht ausgewählte Aufgabe bearbeiten. Zum Ende der „Warm-up“-Phase können die Schülerinnen und Schüler in diesem Fall die Lösung ihrer Aufgabe(n) vorstellen und diskutieren, so dass die „Warm-up“-Phase mit einem Plenum in den Hauptteil übergeht. Falls es erforderlich ist, kann die Lehrkraft zum Ende der „Warm-up“-Phase auch ungelöste Knobelaufgaben auflösen.

Vier Aufgabenbeispiele für die „Warm-up“-Phase aus einer im Rahmen des Projektes entstandenen Sammlung sind hier aufgeführt. Die übrigen Aufgaben und die zugehörigen Lösungen sind im Internet auf der Seite www.sinus.nrw.de verfügbar.

Warm-up 10: Die Uhr, Folge I

Warm-up-Aufgaben (6607)



Zerlege die Uhr mit zwei geraden Schnitten so in drei Teile, dass sich beim Addieren der Zahlen in jedem Teil die gleichen Summen ergeben.

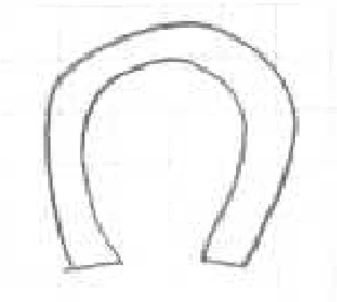
Warm-up 16: Wochentage

Januar 2014

KW	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
1			1	2	3	4	5
2	6	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18	19
4	20	21	22	23	24	25	26
5	27	28	29	30	31		

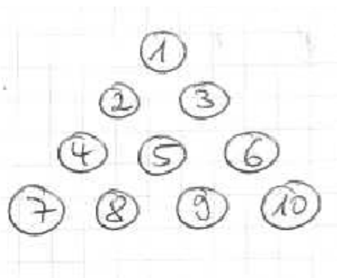
Welcher Tag war vor 41 Tagen, wenn in 68 Tagen Mittwoch ist?

Warm-up 17: Das Zerteilen von Hufeisen



Wie kann man ein Hufeisen mit nur zwei Schnitten in sechs Teile teilen?

Warm-up 20: Das Dreieck steht Kopf



Kannst du das hier abgebildete Dreieck durch das Verschieben von drei Münzen auf den Kopf stellen?

Kreuzzahlrätsel

Ebenfalls geeignet für die Einstiegsphase sind Kreuzzahlrätsel. Dazu werden auf der SINUS-Homepage Beispiele mit umfangreichen Lösungshinweisen angeboten.

Kreuzzahlrätsel (6606)

4.4 Beispiele für den Hauptteil

Die Gestaltung des Hauptteiles einer AG-Sitzung kann sehr unterschiedlich ausfallen. So können im Hauptteil der Sitzung anspruchsvolle mathematische Aufgaben, Erkundungsprojekte oder auch Projekte mit handwerklichen praktischen Einheiten bearbeitet werden. Eine mögliche Vorgehensweise besteht darin, dass sich theoretische Module, wie Module auf Grundlage von Olympiade-Aufgaben, mit Modulen abwechseln, in denen handwerklich gearbeitet oder gezeichnet wird.

Die mathematischen Aufgaben, die im Rahmen dieses Projektes für den Hauptteil zusammengetragen wurden, sind im Wesentlichen in theoretische Module gegliedert, die aus Olympiade-Aufgaben bestehen, die um Hilfen und Anregungen ergänzt wurden. Zwei Beispiele hierfür werden im Folgenden vorgestellt. Neben diesen Aufgaben wurden in diesem Projekt auch kleinere Erkundungsprojekte entwickelt und Materialien für Einheiten mit praktischer Arbeit gesammelt. Alle Materialien zu dem Hauptteil einer AG-Sitzung wurden jeweils um ergänzende Hinweise für die Lehrkraft und ausformulierte Hilfestellungen für die Schülerinnen und Schüler erweitert.

Einheiten auf der Grundlage von Olympiade-Aufgaben

Für den Hauptteil einer Fördersitzung wurden Aufgaben aus verschiedenen Wettbewerbsjahren thematisch zusammengestellt und mit aufsteigendem Schwierigkeitsgrad zu Modulen zusammengefasst. Dabei ist ein Modul für den Hauptteil für einen Zeitbedarf von zwei bis drei 90-minütigen Sitzungen konzipiert. Die Module können, bis auf wenige Ausnahmen, die aufeinander aufbauen, in beliebiger Reihenfolge eingesetzt werden.

Bei einer Vorstellung der Materialien wurde von Teilnehmerinnen und Teilnehmern kontrovers diskutiert, ob Schüleraufgabenblätter nur aus dem Aufgabentext bestehen oder besser durch illustrierende Bilder angereichert werden sollen. Da die Meinungen hier weit auseinander gingen, wurde bei manchen Modulen eine angereicherte Version des Aufgabenblattes erarbeitet.
Zu jedem Modul gibt es

- Lehrermaterial mit
    - Lösungshinweisen
    - didaktischen Hilfestellungen
    - Differenzierungsmöglichkeiten
    - Weiterarbeitsmöglichkeiten
- Schüleraufgabenblatt
- Hilfsangebote für die Schülerinnen und Schüler

Beispielhaft sind hier Ausschnitte aus dem Modul „Wer ist wer“ und aus dem Modul „Winkel im Dreieck“ dargestellt.

4.4.1 Ausschnitte aus dem Modul „Wer ist wer?“

Das Modul „Wer ist wer?“ eignet sich besonders gut als Einstiegsmodul für eine Arbeitsgemeinschaft in der Klasse 5. Das Schüleraufgabenblatt zu diesem Modul, von dem hier die ersten zwei Seiten dargestellt werden, besteht insgesamt aus drei Seiten und umfasst sechs Aufgaben.

Das Lehrermaterial zu diesem Modul ist so umfangreich, dass auf den Seiten 53 bis 55 nur die Teile dokumentiert werden, die zu Aufgabe 2 gehören. Zu dieser Aufgabe gehört auch der als Schülerhilfe konzipierte Ausschneidebogen, der in Abbildung 4.2 auf Seite 54 abgedruckt ist.

Erste Seite des Schüleraufgabenblattes zum Modul „Wer ist wer?“, Textversion

Mathematik-Olympiade e. V.

Materialien für die Klasse 5/6

Wer ist wer?

Aufgabe 1 (490513)

Fünf Jungen gründen eine Band „Die lauten Mathematiker“. Der Name ist entstanden, weil alle an der Mathematik-Olympiade teilgenommen und die ersten fünf Plätze belegt haben. Die Jungen spielen Schlagzeug, Saxophon, Keyboard und Gitarre. Paul singt dazu.

(1) Für Stefan haben sich die Keyboardstunden gelohnt.
(2) Paul war traurig, dass er nicht Erster wurde.
(3) Nils ist nicht Erster, aber auch nicht Vierter geworden. Er spielt Schlagzeug.
(4) Timo ist Zweiter geworden, er spielt keine Gitarre.
(5) Guido freut sich auch über seinen fünften Platz.

a) Welche Plätze haben die Jungen jeweils bei der Mathematik-Olympiade belegt?

b) Wer hat in der Band welche Aufgabe?

Aufgabe 2 (480424)

Von den drei Kindern Andreas, Florian und Martin ist Folgendes bekannt:

(1) Florian hat eine grüne Hose, ein rotes T-Shirt und trägt keine Sandalen.
(2) Martin steht am weitesten von Florian entfernt und trägt eine blaue Hose.
(3) Ein Kind trägt Turnschuhe.
(4) Florian hat braune Haare. Du siehst ihn rechts.
(5) Das Kind mit dem gelben T-Shirt hat Gummistiefel an.
(6) Andreas trägt keine Turnschuhe und hat blonde Haare.
(7) Das Kind neben Andreas hat rote Haare und ein weißes T-Shirt.
(8) Der Junge mit der schwarzen Hose steht neben dem Jungen mit den Sandalen.

Wie sehen die drei Kinder aus? Wie stehen sie nebeneinander?

Zweite Seite des Schüleraufgabenblattes zum Modul „Wer ist wer?“, Bildversion

Aufgabe 3 (350623)

Herr **K**omisch, Herr **E**rnst und Herr **W**itzig treffen sich zum Skat.
Ihre Vornamen sind (möglicherweise in anderer Reihenfolge) **K**laus, **E**gon und **W**alter. Einer von ihnen trägt **k**einen Schlips, ein anderer einen **e**infarbigen und der dritte einen **w**itzigen Schlips. Nach dem Spiel steht fest:

(1) Der Gewinner der Skatrunde trägt einen **e**infarbigen Schlips.
(2) Herr **E**rnst saß noch nie vorher auf Herrn **K**omischs Sofa.
(3) **W**alter trägt **k**einen Schlips.
(4) Herr **K**omisch findet es komisch, dass er nicht gewonnen hat.
(5) **K**laus saß schon das vorige Mal auf Herrn **K**omischs Sofa.
(6) Herr **W**itzig trägt den **w**itzigen Schlips.

Stelle die Vor- und Familiennamen richtig zusammen.

Aufgabe 4 (430522)

Arndt, Bertram, Cecil und Dirk gehen in eine Schule, an der Arbeitsgemeinschaften in Mathematik, Schach, Turnen und Zeichnen angeboten werden. Jeder dieser Schüler hat sich für eine dieser Arbeitsgemeinschaften angemeldet, und zwar jeder für eine andere. Folgendes ist bekannt:

(1) Bertram wollte ursprünglich in die Schach-AG gehen, hat sich dann aber doch anders entschieden.
(2) Der „Turner“, der „Zeichner“ und Bertram haben denselben Schulweg.
(3) Der „Turner“ ist eine Leseratte und verschlingt zur Zeit die Bücher über Harry Potter.
(4) Cecil ärgert sich, dass er bei der Mathematik-Olympiade schlechter abgeschnitten hat als der „Turner“.
(5) Arndt wurde vom „Zeichner“ zum Geburtstag eingeladen.
(6) Weder Dirk noch der „Zeichner“ haben bisher ein Buch über Harry Potter gelesen, wollen dies jedoch schleunigst nachholen.

a) Welche Arbeitsgemeinschaft besucht Bertram? Stelle dar, wie du deine Antwort aus den Angaben (1) bis (6) folgerst.

b) Untersuche, ob sich aus den Angaben (1) bis (6) auch klar und einsichtig ableiten lässt, welche Arbeitsgemeinschaften die anderen drei Jungen besuchen.

Lehrerhinweis zur Olympiade-Aufgabe 2 (480424)

Die Aufgabe sieht auf den ersten Blick sehr kompliziert aus wegen der vielen Merkmale, die zu berücksichtigen sind. Die Struktur der Aufgabe erweist sich dann aber doch als übersichtlich, da fast immer die Betrachtung zweier Merkmale ausreichend ist. Der erste Eindruck könnte die Schülerinnen und Schüler überfordern. Deshalb ist unten eine Zerlegung in Teilaufgaben vorgeschlagen.

Lehrerhinweis zum Einsatz gestufter Hilfen zu Aufgabe 2 (480424)

Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:

Falls für Schülerinnen und Schüler die Informationsfülle in der Aufgabenstellung zu komplex ist, lässt sich die Aufgabe leicht in Teilaufgaben zerlegen:

- Schreibe alle Merkmale auf.
- Welches Kind hat welche Hose an?
- Welches Kind hat welche Haarfarbe?

und so weiter.

Es sollte dann darauf geachtet werden, dass die Zuordnung von Namen und Schuhen erst am Ende verlangt wird, da hier in jedem Fall auf bereits erzielte Ergebnisse zurückgegriffen werden muss.

Als Hilfe können die Bilder aus dem Ausschneidebogen ausgeschnitten und den Schülerinnen und Schülern bei Bedarf angeboten werden. Damit kann die Aufgabe durch Legen von Bildern gelöst werden.

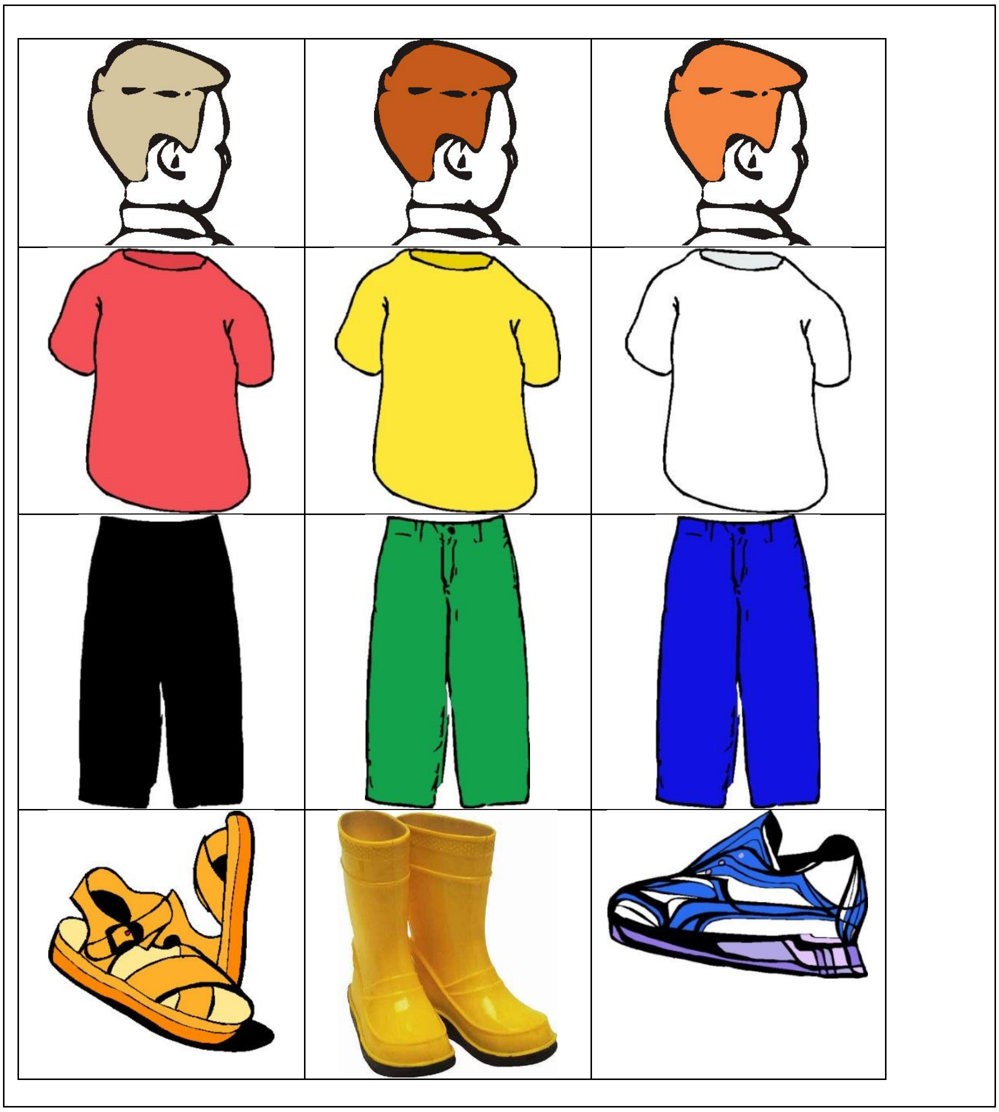


Abbildung 4.2: Schülerhilfe „Ausschneidebogen" zur Aufgabe 2 des Aufgabenblattes

Ausschnitt aus der ausführlichen Musterlösung zu Aufgabe 2

Lösungshinweis:

Es empfiehlt sich, zunächst die verschiedenen Merkmale mit ihren Ausprägungen aus der Aufgabenstellung systematisch aufzuschreiben:

Name:	Florian, Martin, Andreas
Haare:	braun, blond, rot
T-Shirt:	rot, gelb, weiß
Hose:	schwarz, grün, blau
Schuhe:	Sandalen, Gummistiefel, Turnschuhe
Position:	links, Mitte, rechts

Betrachte zunächst die Zuordnung von Name und Hose:

Aus (1) folgt:	Florian	–	grün
Aus (2) folgt:	Martin	–	blau
Damit muss gelten:	Andreas	–	schwarz

Betrachte die Zuordnung von Name und Haaren:

Aus (4) folgt:	Florian	–	braun
Aus (6) folgt:	Andreas	–	blond
Damit muss gelten:	Martin	–	rot

Ideen aus dem Lehrermaterial zur Weiterarbeit und Variation der Aufgabe 2

Mögliche Erweiterungen der Aufgabe:

Da die Information über die Schuhe von Andreas auf verschiedene Arten gewonnen werden kann, ist klar, dass die Aussagen der Aufgabenstellung redundant sind. Besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler können versuchen, die Zahl der Aussagen zu reduzieren, so dass die Aufgabe trotzdem noch lösbar bleibt.

Zusätzlich kann untersucht werden, was passieren würde, wenn man die Aussage (5) ersetzen würde durch

(5) Das Kind mit dem gelben T-Shirt hat Turnschuhe an.

Das führt auf eine unlösbare Aufgabe. Aus der Herleitung, die – wie in den Lösungshinweisen – die Aussagen (1) und (8) benutzt, ergibt sich ein Widerspruch zu der Zuordnung, die aus der neuen Aussage (5) folgt.

An diese Überlegung anschließend kann geprüft werden, ob sich in der Originalaufgabe nicht weitere Widersprüche verbergen, die nicht entdeckt wurden. Diese lassen sich nur dadurch ausschließen, dass man die gefundene Lösung einer Probe unterzieht. Die Notwendigkeit einer Probe, die manchmal bei Aufgaben dieses Typs explizit gefordert wird, ist Schülerinnen und Schülern oft nicht klar.

4.4.2 Ausschnitte aus dem Modul „Winkel im Dreieck“

Material zur Doppeljahrgang-stufe 7-8 (6660)

Das Modul „Winkel im Dreieck“ ist in der Doppeljahrgangsstufe 7/8 angesiedelt. Bei den Aufgaben zur Geometrie werden als eine spezielle Hilfe elektronische Arbeitsblätter eines dynamischen Geometriesystems angeboten. Diese Arbeitsblätter lassen sich einsetzen, um den Zusammenhang der in der Aufgabe gegebenen Größen im Zugmodus zu untersuchen und dadurch auf Vermutungen zu kommen. Der Beweis ist dann jeweils zusätzlich noch zu leisten. Für die Erstellung der Arbeitsblätter wurde das System DynaGeo verwendet. Wird an einer Schule ein anderes System benutzt, so lassen sich die Arbeitsblätter leicht darauf gestalten.

Das gesamte Modul umfasst sechs Aufgaben. Dokumentiert wird hier die Aufgabe 1. Zu dieser Aufgabe werden in der Materialsammlung im Internet ein Lösungsvorschlag, gestufte Hilfekarten und auch eine DynaGeo-Datei angeboten.

Aufgabe 1 aus dem Modul „Winkel im Dreieck“

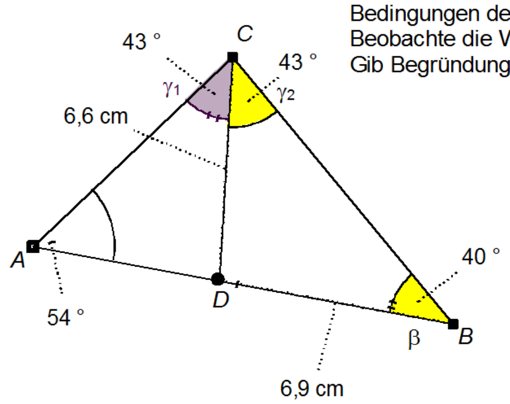
Aufgabe 1 (490713)

Über ein Dreieck ABC ist bekannt:

i Die Größe des Winkels α beträgt 60°.
ii Die Winkelhalbierende von γ schneidet die Seite AB so in einem Punkt D, dass die Strecken CD und BD gleich lang sind.

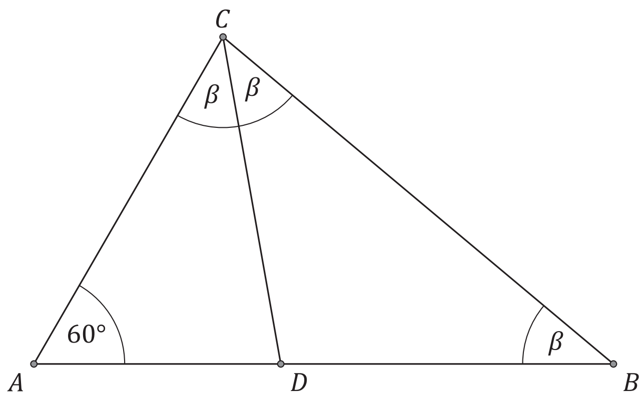
Stelle das Dreieck durch eine Skizze dar.
Bestimme die Größe der Winkel β und γ.

DynaGeo-Arbeitsblatt zur Aufgabe 1 (490713)



Ziehe an den Punkten B oder C, so dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.
Beobachte die Winkelgrößen dabei.
Gib Begründungen für deine Beobachtungen.

Lösungsvorschlag aus der Materialsammlung



In der Skizze ist das Teildreieck CDB als gleichschenklig zu identifizieren. Daraus ergibt sich, dass im Teildreieck CDB der Winkel bei C die Größe β hat.

Da CD Winkelhalbierende von γ ist, hat im Teildreieck ADC der Winkel bei C ebenfalls die Größe β.

Betrachtet wird die Winkelsumme im Dreieck ABC:

$$\begin{aligned} & 60° + \beta + 2 \cdot \beta = 180° \\ \text{also} \quad & \beta = 40° \\ \text{und} \quad & \gamma = 2 \cdot \beta = 80° \end{aligned}$$

4.4.3 Ausschnitte aus dem Modul „Pop-up-Karten“

Da es in diesem Projekt um die Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler geht, die zum Beispiel in mathematischen Arbeitsgemeinschaften stattfindet, ist darauf zu achten, dass auch bei der praktischen Arbeit ein Bezug zur Mathematik erkennbar ist.

Pop-up Karten (6661)

Zu den Einheiten mit praktischen Arbeiten wurden im Rahmen dieses Projektes keine erklärenden Schülerarbeitsblätter, Arbeitsaufträge oder Materialien erstellt. Bei diesen Einheiten sollte die Lehrkraft Ziel, Arbeit und die Vorgehensweise erklären und vorführen. Der Bezug zur Mathematik kann in diesen Einheiten oft produktiv im Plenum diskutiert werden.

Dokumentiert wird hier ein Ausschnitt aus dem Modul zur Erstellung von fraktalen Pop-up-Karten. Eine solche Karte ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

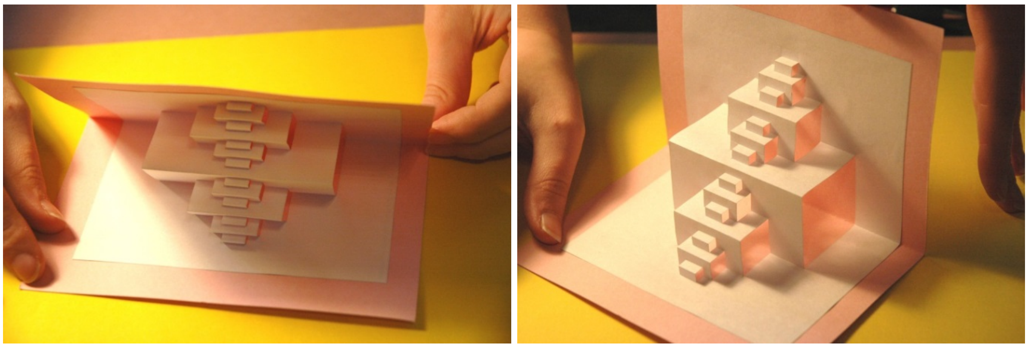


Abbildung 4.3: Aufklappen einer Pop-up-Karte, bei der eine fraktale Struktur erkennbar wird

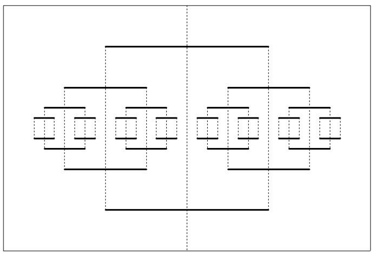
Erläuterung für den Leiter der AG zu Pop-up-Karten

Unter Pop-up-Karten versteht man Klappkarten, die beim Aufklappen ein räumliches Gebilde entfalten. Im Internet findet man unzählige Bastelanleitungen für solche Karten. Darunter sind auch solche, die mathematische Motive enthüllen. In dieser Einheit wird vorgeschlagen, Karten mit fraktalen Motiven zu gestalten. Neben der handwerklichen Betätigung kann man eine Reihe von mathematischen Tätigkeiten anschließen. Das beginnt bei der räumlichen Vorstellung, die insbesondere beim Knicken der Linien gefördert wird, und geht bis zur Mustererkennung, wenn darüber nachgedacht wird, aus welchen Teilen die Motive bestehen, wenn man immer feinere Strukturen herausarbeiten würde.

Die Schülerinnen und Schüler haben erfahrungsgemäß viel Freude beim Erstellen der Karten und fragen meistens nach weiteren Vorlagen, die sie zu Hause bearbeiten können.

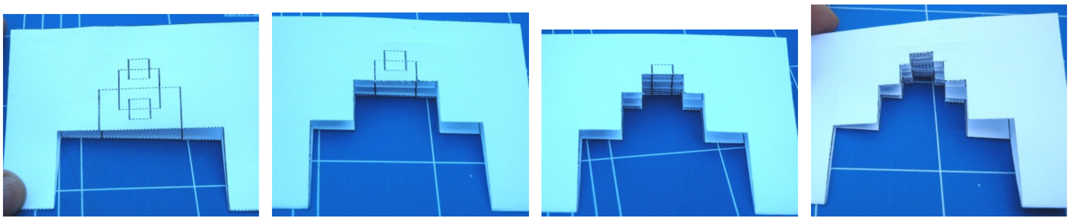
Benötigte Materialien

- Cuttermesser
- Lineal mit Stahlkante
- Schneidematte
- Klebestift
- Vorlagen für die Karteneinlagen (kopiert auf Papier)
- Zeichenkarton für die Karten
- Eventuell Buntstifte, wenn eine farbige Gestaltung gewünscht wird



In den Vorlagen gibt es durchgezogene und gestrichelte Linien. Entlang der durchgezogenen Linien muss mit einem scharfen Cuttermesser ein Schnitt gelegt werden. Die gestrichelten Linien sind Knicklinien. Es empfiehlt sich, diese Knicklinien leicht vorzuritzen. Das geht gut mit dem Rücken des Cuttermessers. Manche der Linien werden später nach innen, andere nach außen geknickt. Das Vorritzen sollte dann eigentlich immer auf der späteren Außenseite des Knicks erfolgen. Es reicht aber bei dünnem Papier, wenn ausschließlich auf der bedruckten Seite angeritzt wird.

Vorlagen finden sich in der Datei „Fraktale_Pop-Up-Karten_Vorlagen.docx“ usw. Insgesamt sind zur Zeit vier verschiedene Vorlagen verfügbar. Für Schülerinnen und Schüler, die nicht besonders geübt sind im Umgang mit Bastelmaterialien, stehen die Vorlagen „Vorlagen 1 Generationen.pdf“ zur Verfügung. Nach dem Schneiden und Ritzen wird die Figur gefaltet. Dabei empfiehlt es sich, stufenweise vorzugehen und nach jeder Stufe die Knicke fest anzudrücken. Nach dem Knicken wird die Figur in eine Karte aus Zeichenkarton passend eingeklebt.



Vorgehensweise in der Arbeitsgemeinschaft

Zunächst werden den Schülerinnen und Schülern einige Pop-up-Karten vorgeführt. Das weckt bei den meisten bereits den Wunsch, so etwas selber herzustellen.

Bevor das Material ausgeteilt wird, sollten Sicherheitshinweise zum Umgang mit dem Cuttermesser gegeben werden. Als weitere Erklärung ist wirklich nur notwendig, auf die beiden unterschiedlichen Arten von Linien hinzuweisen.

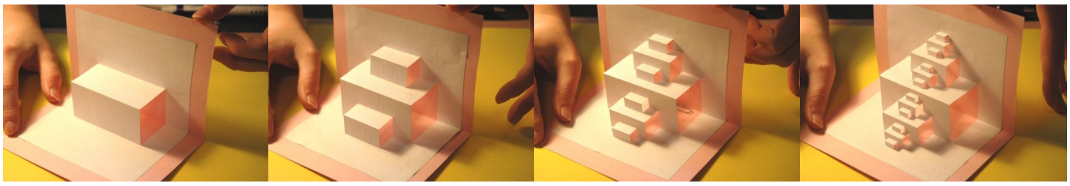
Das richtige Knicken macht den Schülerinnen und Schülern größere Schwierigkeiten. Insbesondere kommt es häufig vor, dass sie zunächst auf allen Stufen bis an den Rand knicken, so dass später in der Figur auf eigentlich glatten Teilen unschöne Knicke entstehen. Daher muss der Lehrer oder die Lehrerin beim Knicken helfen bzw. die ersten Knicke vormachen. Da die Schülerinnen und Schüler unterschiedlich schnell mit den Vorarbeiten fertig werden, geschieht diese Hilfe am besten in kleinen Gruppen. Außerdem ist diese Hilfe im Plenum nur schlecht von allen zu sehen.

Das Einkleben in die Kartonkarte ist dann wieder problemlos.

Es kommt immer wieder vor, dass einzelne Schülerinnen und Schüler sich verschneiden. Daher sollten ausreichend viele Vorlagen in Reserve gehalten werden.

Hinweise zum mathematischen Gehalt und zu möglichen Fortführungen

Man kann nun darauf hinweisen, dass die Figur in mehreren Stufen (Generationen) entsteht. Dabei bieten vorbereitete Karten, die die einzelnen Entstehungsstufen zeigen, eine Hilfe. Dafür stehen die Vorlagen in der Datei „Vorlagen 1 Generationen.pdf“ zur Verfügung.



An den Figuren kann direkt gezählt werden:

- Wie viele Stufen gibt es in den einzelnen Generationen?
- Wie viele Stufen sind von Generation zu Generation hinzugekommen?
- Wie viele Schnitte sind bei jeder Generation erforderlich?
- Wie viele Knicklinien sind bei jeder Generation erforderlich?
- Wie sehen die Zahlen bei der 10. Generation aus, wie bei der 100.?

Durch Rechnung können weitere Fragen betrachtet werden, die insbesondere die leistungsstärksten Schülerinnen und Schüler herausfordern:

- Wie groß ist die Papierfläche, die auf die Karte geklebt wird, in jeder Generation?
- Wie groß ist das Volumen unter der Treppe in jeder Generation?

4.5 Beispiel für den Ausklang

Es gibt viele mathematische Spiele, die als Ausklang einer AG-Sitzung geeignet sind. In der Weihnachtszeit können in dieser Phase auch Aufgaben aus dem jedes Jahr im Internet verfügbaren „mathematischen Adventskalender“ verwendet werden. Weitere Spiele und Informationen sind in der Materialdatenbank des Projektes unter www.sinus.nrw.de zu finden. Hier ist beispielhaft das weniger bekannte „Autorennen auf Papier“ dokumentiert.

Autorennen (6662)

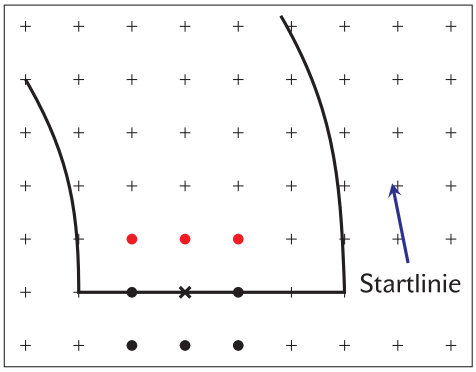
Autorennen auf Papier

Regeln

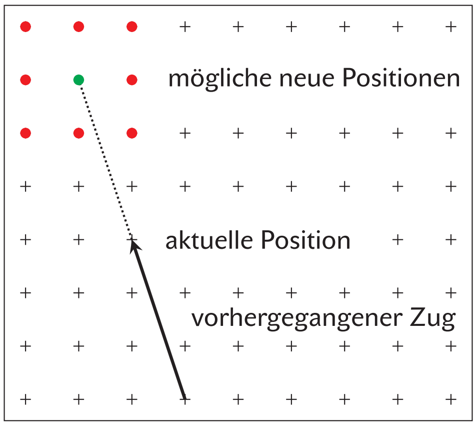
Das Spiel kann alleine oder mit mehreren Spielern gespielt werden. Zunächst werden auf kariertem Papier eine Rennstrecke, eine Startlinie und eine Ziellinie gezeichnet. Für jeden Mitspieler wird auf der Startlinie die Position seines Autos eingetragen.

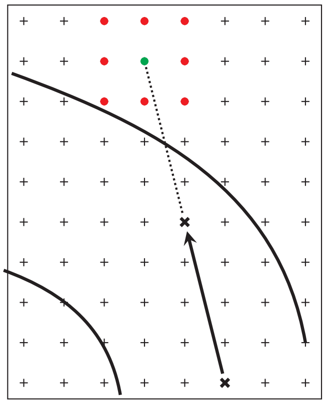
In jeder Spielrunde besetzt jeder Mitspieler eine neue Position. Der Zug auf die neue Position wird durch einen Pfeil dargestellt. Die Ermittlung der neuen Position ist davon abhängig, ob das Auto steht oder fährt. Stets sind neun Punkte als neue Position möglich. Zur besseren Übersichtlichkeit ist hier nur die Fahrt eines Autos dargestellt.

Bei **stehendem Auto** ist jeder der acht Gitterpunkte, die um die Position des Autos, gekennzeichnet mit x, herum liegen, eine mögliche neue Position. Das Auto könnte auch an seiner Position stehen bleiben, was aber in der Regel nicht sinnvoll sein wird. Beim Start wird es nur sinnvoll sein, einen der drei vor dem Auto befindlichen Gitterpunkte (rot) anzusteuern. Jeder Zug wird durch einen Pfeil dargestellt.



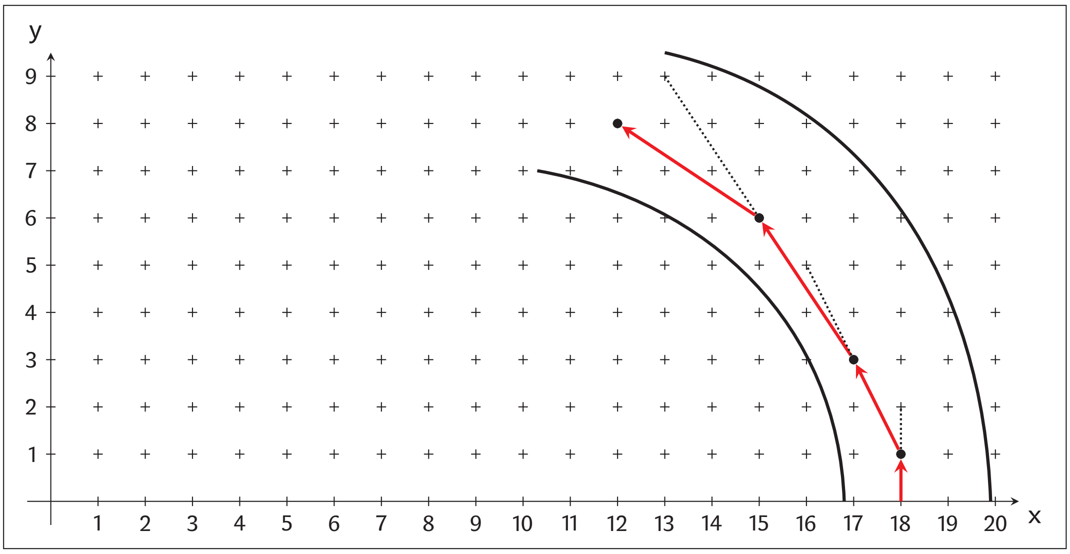
Bei **fahrendem Auto** muss von der aktuellen Position aus zunächst der vorhergegangene Zug gedanklich durchgeführt werden (gestrichelte Linie). Der dadurch erreichte Punkt (grün) und die acht Nachbarpunkte (rot) sind die möglichen neun Zielpunkte des nächsten Zuges. Sollte einer dieser Punkte bereits von einem anderen Auto besetzt sein, darf er nicht gewählt werden.





Wer nur noch einen Gitterpunkt außerhalb der Strecke ansteuern kann, z. B. weil das Auto zu schnell auf eine Kurve zugefahren ist, **scheidet aus**.

Beispiel der ersten Züge einer Fahrt



Vom Startpunkt (18/0) kann einer der Punkte (17/1), (18/1) oder (19/1) angesteuert werden. Das Auto fährt im Beispiel jedoch von der Startlinie geradeaus los und erreicht deshalb (18/1) als neue Position. Würde das Auto nun unverändert weiterfahren, würde es zur Position (18/2) gelangen. Der Fahrer beschleunigt jedoch und lenkt nach links. Daher wird die Position (17/3) erreicht. Prinzipiell wären auch die Positionen (18/3), (19/3), (17/2), (18/2), (19/2), (17/1), (17/2) oder (17/3) möglich gewesen. Würde das Auto nun unverändert weiterfahren, würde es zur Position (16/5) gelangen. Der Fahrer beschleunigt jedoch noch mehr und lenkt etwas nach links. Dadurch wird die Position (15/6) erreicht. Prinzipiell wären auch die Positionen (16/6), (17/6), (15/5), (16/5), (17/5), (15/4), (16/4) oder (17/4) möglich gewesen.

4.6 Modellhafte Reihenplanung für ein Halbjahr in Klasse 5

Beispielhaft wurde eine mögliche Reihenfolge für das Einstiegshalbjahr in der Klasse 5 für das erste Halbjahr des Schuljahres 2013/2014 erstellt. Es handelt sich um einen Vorschlag, der beliebig abgeändert werden kann. Viele Materialien aus der Übersicht sind mit Erläuterungen in der Materialdatenbank des Projektes zu finden.

MafiSuS (6674)

KW	Datum	Warm up	Hauptteil	Ausklang
37	09.09. – 13.09.2013	Kirschtorte	Informationen zur **Mathematik-Olympiade**, ausgewählte Aufgaben *Motivation zur Teilnahme, Wettbewerb steht unmittelbar bevor*	Black Story
38	16.09. – 20.09.	Tanzsaal	Modul „Wer ist wer?“	Black Story
39	23.09. – 27.09.	Lügengeschichten	Modul „Wer ist wer?“	Nim-Spiel
40	30.09. – 04.10.	Leitungsbau	Projekt „Schrägbilder“	Nim-Spiel
41	07.10. – 11.10.	Gleisarbeiten	Projekt „Schrägbilder“	100 gewinnt
42	14.10. – 18.10.	Schwimmbecken	Modul „Probleme an der Waage“	Kreuzzahlrätsel
43	Herbstferien			
44	Herbstferien			
45	04.11. – 08.11.	Nüsse	Bastelprojekt „Pop-up Karten“ / Training für 2. Runde der MO *Als Motivation für die Mustererkennung nutzbar*	Autorennen
46	11.11. – 15.11.	Geschwister	Bastelprojekt „Pop-up Karten“	Autorennen
47	18.11. – 22.11.	Wasserkrüge	Modul „Mustererkennung“	Fünf in einer Reihe
48	25.11. – 29.11.	Die Uhr	Modul „Mustererkennung“ *Hinweis auf mathematische Adventskalender*	Fünf in einer Reihe
49	02.12. – 06.12.	Wochentage	Bastelprojekt „Fröbelsterne“ *passend zur Vorweihnachtszeit*	Adventskalender
50	09.12. – 13.12.	Hufeisen zerteilen		Adventskalender
51	16.12. – 20.12.	Der Diebstahl der Edelsteine	Modul „Kryptogramme“	Kreuzzahlrätsel in Weihnachts-baumform
52	Weihnachtsferien			
1	Weihnachtsferien			
2	08.01. – 10.01.2014	Der Treffpunkt	Modul „Kryptogramme“	Black Story
3	13.01. – 17.01.	Das Dreieck steht kopf	Informationen zum **Känguru-Wettbewerb,** ausgewählte Aufgaben *Motivation zur Teilnahme, Anmeldung steht unmittelbar bevor*	Kreuzzahlrätsel
4	20.01. – 24.01.	Ein Rechenrätsel	Modul „Rund um den Kreis“	Autorennen
5	27.01. – 31.01.	Schachproblem 1	Modul „Rund um den Kreis“	Groschenspiel
6	03.02. – 07.02.	Schachproblem 2	Modul „Rund um den Kreis“	Nur kein Rechteck

4.7 Übersicht über Module auf der Grundlage von Olympiade-Aufgaben

Doppeljahrgang	Oberthema	Thema
Klasse 5/6	Geometrie	Rund um den Kreis 5/6
		Zerlegung von Flächen
	Verborgene Zahlen	Experimentieren, Beobachten, Argumentieren
		Kryptogramme
		Rechenaufgaben
		Zahlenrätsel
	Wer ist wer?	
	Knobeln mit der Waage	
	Teilbarkeit	
	Mustererkennung	
	Systematisches Probieren	
	Kombinatorisches Zählen	
Klasse 7/8	Geometrie	Rund um den Kreis 7/8
		Winkel im Dreieck
		Kongruenz und Symmetrie
	Systematisches Probieren	

Dabei sind die grau unterlegten Module fertig (Stand Juni 2013)

4.8 Literaturliste

Holzamer, Peter (1994). *Kreuzzahlenrätsel und Zahlenknobeleien*. Frankfurt: Harri Deutsch.

König, Helmut (1996). *Arbeitsgemeinschaften Klasse 5 – eine Anleitung für AG-Leiter*. Chemnitz: Bezirkskomitee.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (1996). *Die 35. Mathematik-Olympiade 1995/96*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (1997). *Die 36. Mathematik-Olympiade 1996/97*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (1998). *Die 37. Mathematik-Olympiade 1997/98*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (1999). *Die 38. Mathematik-Olympiade 1998/99*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2000). *Die 39. Mathematik-Olympiade 1999/2000*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2001). *Die 40. Mathematik-Olympiade 2000/2001*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2002). *Die 41. Mathematik-Olympiade 2001/2002*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2003). *Die 42. Mathematik-Olympiade 2002/2003*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2004). *Die 43. Mathematik-Olympiade 2003/2004*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2005). *Die 44. Mathematik-Olympiade 2004/2005*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2006). *Die 45. Mathematik-Olympiade 2005/2006*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2007). *Die 46. Mathematik-Olympiade 2006/2007*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2008). *Die 47. Mathematik-Olympiade 2007/2008*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2009). *Die 48. Mathematik-Olympiade 2008/2009*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2010). *Die 49. Mathematik-Olympiade 2009/2010*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2011). *Die 50. Mathematik-Olympiade 2010/2011*. Hamburg: Hereus Verlag.

Mathematikolympiaden e. V., Hrsg. (2012). *Die 51. Mathematik-Olympiade 2011/2012*. Hamburg: Herues.

Uribe, Diego (1993). *Fractal Cuts – Exploring the magic of fractal with pop-up designs*. Norfolk: Traquin Publications.

5 Sinnvolles Üben im Mathematikunterricht

Rainer Altmann

5.1 Erläuterungen zur Themenwahl

„Übung macht den Meister" und „Ohne Fleiß kein Preis" sind zwei Aussagen, die uns alle geläufig sind. Schon vom ersten Schuljahr an, oder auch schon davor, versuchen Eltern bei verschiedenen Anlässen ihre Kinder zum Üben zu motivieren – mit und ohne Erfolg. Gerade in der heutigen Entwicklung, in der die Heterogenität von Lerngruppen Bestandteil vieler Diskussionen ist und in der die Schulzeit verkürzt wird, um früher bestimme schulische Abschlüsse zu erlangen, erscheint ein sinnvolles Üben als sehr wichtig. Gleichzeitig werden Aufgabenpäckchen, wie sie in einigen Büchern und auch im Netz zu finden sind, kritisiert und hinterfragt. Damit stellt sich in besonderer Weise die Frage, wie das Üben und damit auch eine Übungsaufgabe sinnvoll gestaltet werden kann.

Sinnvolles Lernen im Mathematikunterricht (6647)

5.2 Projektbeschreibung und Zielsetzung

Im Projekt haben Kolleginnen und Kollegen des Clara-Schumann-Gymnasiums in Holzwickede, des Friedrich-Bährens-Gymnasiums in Schwerte, der Peter-Weiss-Gesamtschule in Unna sowie der Otto-Schott-Realschule in Witten und der Gustav-Heinemann-Gesamtschule in Dortmund zusammengearbeitet. Ziel war es, Kriterien für die Steigerung der Qualität und Effektivität der Übungen im Mathematikunterricht und bei den Hausaufgaben aufzuzeigen. Es wurden Merkmale für sinnvolles Üben gesammelt und diskutiert sowie Besonderheiten der Aufgabenvariation nach Prof. Dr. Regina Bruder und Prof. Dr. Timo Leuders angewandt. Ebenfalls wurden Diagnose- und Übungsaufgaben für unterschiedliche Leistungsniveaus der Schülerinnen und Schüler zusammengetragen. Dazu wurden Aufgaben vieler Mathematikschulbücher und Arbeitshefte auf ihre Effektivität hin untersucht.

Zur Frage, wann eine Übung effektiv ist, äußert sich H. W. Heymann (1998). Nach ihm sind Übungen dann effektiv, wenn

- Verständnis für Sinn und Notwendigkeit des Übens geweckt wird,
- Methoden des effizienten Übens vermittelt und eingeübt werden,
- Gelegenheit zur Entdeckung der Stärken und Schwächen beim Lernen gegeben wird und für den Umgang damit beraten wird,
- Übungen so organisiert werden, dass der eigene Fortschritt von den Schülerinnen und Schülern erkannt werden kann,

- häufiger kürzere Übungen als langes ununterbrochenes Üben an einem Stück durchgeführt werden,
- Übungsformen variiert werden, um vorzeitiger Ermüdung und dem Absinken des Interesses vorzubeugen,
- Schüler „Eselsbrücken" finden können und
- Schüler an der Ergebniskontrolle beteiligt werden.

Zur Qualität von Übungsphasen allgemein können auch die Betrachtungen von Hilbert Meyer (2004) zum guten Unterricht herangezogen werden. Hilbert Meyer spricht von intelligenten Übungsphasen des Unterrichts, wenn

- ausreichend oft und im richtigen Rhythmus geübt wird,
- die Übungsaufgaben passgenau zum Lerngegenstand formuliert werden,
- die Schülerinnen und Schüler Übungskompetenz entwickeln und die richtigen Lernstrategien nutzen und
- die Lehrerinnen und Lehrer gezielte Hilfestellungen beim Üben geben.

Als Indikatoren hierfür gibt er an:

- Es wird oft, aber kurz geübt. Dafür steht ausreichend Zeit zur Verfügung.
- Es gibt gemeinsam vereinbarte, von Lehrerinnen und Lehrern und den Schülerinnen und Schülern eingehaltene Regeln (z. B. zum Zugriff auf knappe Materialien, zur Lautstärke, zum Herumlaufen …).
- Es herrscht eine angenehm ruhige und konzentrierte Arbeitsatmosphäre.
- Es gibt nur wenige Unterrichtsstörungen; dort, wo sie doch auftreten, werden sie von Lehrerinnen und Lehrern und Schülerinnen und Schülern gleichermaßen diskret behoben.
- Die Schülerinnen und Schüler haben verstanden, was sie üben sollen; und wenn doch etwas unklar ist, wenden sie sich an Mitschülerinnen und Mitschüler oder an die Lehrerinnen und Lehrer.
- Es gibt personen-, ziel- und themen- oder methodendifferenzierte Übungsaufträge.
- Es gibt ansprechende, sich selbst erklärende Übungsmaterialien.
- Die Schülerinnen und Schüler haben ihre Übeutensilien dabei (Materialien, Hefte, Lernmittel).
- Die Materialien erlauben eine Kontrolle des Lernerfolgs – allein oder im Tandem.
- Die Lehrerin/der Lehrer beobachtet die Übungsversuche und gibt einzelnen Schülerinnen und Schülern, wo dies notwendig ist, fachliche Hilfestellungen.
- Die Übungsleistungen der Schülerinnen und Schüler werden anerkannt.
- Die Hausaufgaben werden kontrolliert und gewürdigt.

Für die Gestaltung der Übungsphasen sind insbesondere die Indikatoren hilfreich, da diese auch als Handlungs- und Gestaltungsempfehlungen verstanden werden können. Interessant ist der letzte

Indikator, da dieser nahelegt, dass Hausaufgaben grundsätzlich Übungen sind. Wahrscheinlich liegt dies darin begründet, dass traditionell viele Übungsphasen in Hausaufgabenzeiten verlagert wurden.

5.3 Üben in der Schule oder zu Hause

Im Rahmen der Diskussionen um Ganztagsschulen, aber auch in Zusammenhang mit der Schulzeitverkürzung am Gymnasium mit verstärktem Nachmittagsunterricht muss die Rolle der Hausaufgaben und damit dann auch der Ort des Übens neu diskutiert werden. Dies führt unweigerlich zu der Frage, wo denn hauptsächlich geübt werden soll.

An sehr vielen Schulen, hauptsächlich aber an Halbtagsschulen, werden die Übungen traditionell in Form von Hausaufgaben erledigt. Im Unterricht werden einige Musteraufgaben gerechnet, geübt werden soll zu Hause. Im Hausaufgabenerlass des Landes NRW wird der Umgang mit Hausaufgaben genau geregelt. Ganztagsschulen und Halbtagsschulen mit Nachmittagsunterricht können nur noch in sehr begrenztem Rahmen Hausaufgaben aufgeben, so dass hier in der Schule Zeiten und Formen des Übens entwickelt werden. Die Rolle der Hausaufgaben wird kontrovers diskutiert. Es haben sich zwei Lager gebildet. das Lager der Hausaufgabenbefürworter und das der Hausaufgabengegner.

Neben der Förderung von Selbstständigkeit und Konzentrationsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler werden von den Befürwortern häufig auch zeitökonomische Faktoren genannt. Da die Unterrichtszeit zu knapp bemessen sei, müssten Lern- und Übungszeiten nach Hause ausgelagert werden. Dem kann entgegengehalten werden, dass das Stellen, Kontrollieren und Besprechen von Hausaufgaben häufig wesentlich länger dauert als das Anfertigen. Zudem kann eine zu ausführliche Besprechung diejenigen Schülerinnen und Schüler langweilen und demotivieren, die ihre Hausaufgaben richtig gelöst haben. Es scheint effektiver zu sein, wenn die Aufgaben gleich im Unterricht gelöst werden (Helmke 2009; Kohler 2005).

Von den Hausaufgabengegnern wird auch noch ein weiteres Argument ins Spiel gebracht. Nach dem Schultag können zu viele Hausaufgaben zu einer Überforderung der Schülerinnen und Schüler führen. Sie können zu Hause nicht entspannen, denn „Hausaufgaben stellen eine Verlängerung des Leistungsdrucks dar“ (Keck 1978), der in der Schule herrscht. Außerdem bedeuten Hausaufgaben einen Verlust der Freizeit und können eine Belastung für die ganze Familie darstellen (Höhmann und Holtappels 2006).

Prof. Dr. Hans Gängler (Professor für Sozialpädagogik und ihre Didaktik) von der TU Dresden hat durch Untersuchungen an Schulen herausgefunden, dass „Hausaufgaben keinerlei nachweisbaren Einfluss auf die Schulnoten haben“, denn „gute Schüler werden durch Hausaufgaben nicht unbedingt noch besser, und schlechte Schüler begreifen zu Hause durch bloßes Wiederholen noch lange nicht, was sie schon am Vormittag nicht richtig verstanden haben“ (*Pressemitteilung der technischen Universität Dresden* 2008).

Per Erlass ist geregelt, dass einheitliche Absprachen zu den Hausaufgaben in den entsprechenden Gremien wie Schul- und Fachkonferenz geschlossen werden. *Die Lehrerinnen und Lehrer dieses Pro-*

jekts lassen ihre Schülerinnen und Schüler vorwiegend im Unterricht üben und geben nur wenige Hausaufgaben auf. Mit diesem Konzept werden durchweg gute Erfahrungen gemacht.

Wenn Hausaufgaben aufgegeben werden, so ist es sinnvoll, „die sieben Eckpfeiler Ihrer Hausaufgabenpraxis" zu beachten (Direktion für Erziehung 2009):

1. Hausaufgaben sind ein Thema des Kollegiums. Deshalb verfügt jede Schule über eine bewusste, regelmäßig überdachte Hausaufgabenkultur.

2. Hausaufgaben sind so oder so ein Fenster der Schule. Nutzen Sie es aktiv, zeigen und erklären Sie den Eltern Ihre Hausaufgabenkultur.

3. Lieber oft als viel! Geben Sie Ihren Schülerinnen und Schülern regelmäßig und eher kurze Hausaufgaben.

4. Qualität vor Quantität! Geben Sie denkanregende Hausaufgaben, welche den weiteren Unterricht vorbereiten.

5. Differenzieren geht über studieren! Differenzieren Sie mit Sorgfalt.

6. Reden Sie mit Ihren Schülerinnen und Schülern über die Hausaufgaben. Klären Sie bei ihnen ab, über welche arbeitstechnischen, intellektuellen und motivationalen Voraussetzungen sie verfügen.

7. Gehen Sie nie davon aus, dass die Eltern beim Lösen und Betreuen der Hausaufgaben mitwirken können und sollen.

5.4 Übungsformate (mit Beispielen)

Nach diesen allgemeinen Überlegungen zu den Rahmenbedingungen sollen nun die Übungsaufgaben an sich genauer betrachtet werden. Dabei muss beachtet werden, dass Üben durchaus unterschiedlich gesehen werden kann.

Üben ist eine Lerntätigkeit, geübt wird alleine oder gemeinsam mit anderen. Das Ziel ist es, neue oder schon früher kennengelernte Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren sowie Vorgehensstrategien in variierten Kontexten verfügbar zu machen und verständig anzuwenden (vgl. Bruder 2008b).

Ebenfalls sollen durch Übungen Fähigkeiten und Strategien flexibilisiert und Begriffe vernetzt und Selbstregulationskompetenzen, Selbstbewusstsein und Kreativität gestärkt werden (Büchter und Leuders 2005, S. 143).

In Tabelle 5.1 ist dargestellt, was von Schülerinnen und Schülern alles geübt werden kann. Geübt werden können Anwendung von Fachwissen (Kenntnisse), Fertigkeiten, Verstehen/Vorstellungen, Anwendungsfähigkeit, Strategien, Reflexionsfähigkeit und Einstellungen.

All diese Fähigkeitsaspekte sollen durch Üben gleichermaßen und nicht hierarchisierend gefördert werden. Gute Übungsaufgaben sprechen *alle* Fähigkeiten an und müssen für leistungsstarke

Fähigkeitsaspekt	Operation am Beispiel „Prozentrechnung“
Kenntnisse	die Prozentzahl mit eigenen Worten erklären, die Begriffe Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert erläutern
Fertigkeiten	fehlerlos Prozentzahlen in andere Zahlenformate umwandeln, fehlerlos einen Prozentsatz, einen Prozentwert und einen Grundwert berechnen
Verstehen/ Vorstellungen	am Beispiel/an einem Bild erläutern, was z. B. ein Prozentsatz ist
Anwendungsfähigkeit	in unbekannten Situationen Probleme mit der Prozentrechnung lösen
(übergreifende) Strategien	in einer unbekannten Situation, bei der es um „Prozent“ geht, sich zu helfen wissen, z. B. durch Betrachten von Beispielen
Reflexionsfähigkeit	beurteilen, ob es in einer bestimmten Situation sinnvoll ist, mit Prozentzahlen zu rechnen
Einstellungen	… und auch dazu bereit sein

Tabelle 5.1: Analyse von Fähigkeitsaspekten zum produktiven Üben (nach Leuders u. a. 2009, S. 130-143)

und -schwache Schülerinnen und Schüler zugänglich sein. Jedoch darf nicht das Automatisieren von Fähigkeiten allein im Vordergrund stehen, sondern es sollte immer auch dazu angeregt werden, die Begriffe und Verfahren in ihrer Bedeutung zu sehen, sie näher zu verstehen und zu reflektieren. Intelligentes Üben im Mathematikunterricht darf kein Üben für Intelligente werden, sondern es müssen alle Schülerinnen und Schüler angesprochen werden (siehe Leuders u. a. 2009, S. 130-143).
Abhängig von Gestaltung und Art der Übungsaufgaben unterscheidet Regina Bruder (2008a) verschiedene Übungsformate:

Explizites Üben: Basiswissen wird aufgefrischt bzw. gefestigt.

Implizites Üben: In Anwendungen werden Grundlagen verknüpft und mitgeübt.

Intelligentes Üben: Es werden ein vertieftes Verständnis mathematischer Zusammenhänge und das Üben an sich gelernt.

Produktives und vernetzendes Üben: Es werden verschiedene mathematische Themenfelder vernetzt und Sinnzusammenhänge geschaffen.

Reflektierende Übungen: Es wird eine Reflexion über das eigene Tun angeregt und Diagnosemöglichkeiten geschaffen.

Diese Übungsformate werden in den folgenden Abschnitten anhand von Beispielen kurz erläutert.

5.4.1 Explizites Üben

Das explizite Üben eignet sich vor allem für das Auffrischen von Basiswissen. Damit kann jeweils für bestimmte mathematische Inhalte überprüft werden, ob die Lernenden eine Lösungsstrategie beherrschen und bestimmte prozessbezogene Kompetenzen entwickelt haben.

Beispiele:

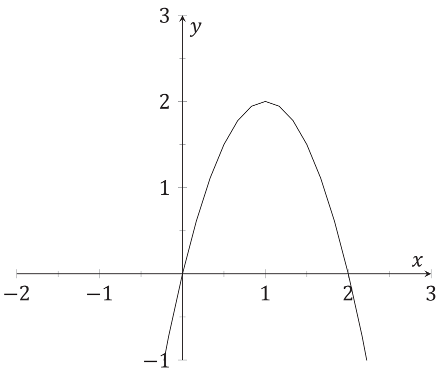
- Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 5 cm und 6 cm!
- Bestimme die Summe: $\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4}$.
- Ist $x = 3$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - 3x + 5 = 2x^2 - 4x + 1$?
- Wie groß ist die Innenwinkelsumme bei einem Fünfeck?

Eine besondere Form des expliziten Übens sind die sogenannten Kopfübungen. Bei einer Kopfübung werden eine bestimmte Anzahl von kompakten Basisaufgaben aus verschiedenen Inhaltsbereichen den Schülerinnen und Schülern in einem begrenzten Zeitfenster zur Bearbeitung gegeben, so dass die Schülerinnen und Schüler die zugehörigen, teilweise vor längerer Zeit erworbenen Kompetenzen erneut aktivieren und abrufen. Die Präsentation der Aufgaben kann in Form eines Arbeitsblattes oder durch Projektion auf eine Leinwand erfolgen. Ziel von regelmäßigen Kopfübungen ist es, erlernte Kompetenzen und Basiswissen auf lange Sicht abrufbereit zu halten.

Beispiel einer wiederholenden Kopfübung für eine neunte Klasse

1. Rechne um: $0.7\,\mathrm{m}^2 = \_\_\_\_\,\mathrm{cm}^2$
2. Ein Quader mit einem Volumen von 144 cm³ hat eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 6 cm. Wie hoch ist der Quader?
3. $-20 + 80 - 120 =$?
4. $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} =$?
5. Stelle nach h um: $A = \frac{g \cdot h}{2}$
6. 2 Mähdrescher bringen die Ernte eines Feldes in 12 Stunden ein. Wie lange benötigen 3 Mähdrescher für die gleiche Ernte?
7. Berechne 7 % von 300.
8. Skizziere den Graphen zu $f(x) = 3x–1$ (bzw. $y = 3x - 1$).

9. Ermittle einen passenden Funktionsterm.



10. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, beim dritten Wurf mit einem Würfel die erste 6 zu erzielen?

Die Auswertungen der Kopfübungen können zusätzlich für Diagnosezwecke genutzt werden. Hierbei hat es sich im Projekt als sehr hilfreich erwiesen, wenn die Aufgaben jeder Kopfübung durchnummeriert werden und die Aufgabe zu einer bestimmten Aufgabennummer immer aus demselben Inhaltsfeld gewählt wird, so dass zum Beispiel Aufgabe 4 immer zur Bruchrechnung gehört. Bei einer solchen Nummerierung können die Schüler, wenn sie über mehrere Kopfübungen ihren jeweiligen Leistungsstand in eine entsprechende Tabelle eintragen, ihre Leistungsentwicklung für jeden Bereich verfolgen.

Beispielhafter Auswertungsbogen für einen Schüler mit vier Kopfübungen:

	1. Größen umwandeln	2. Körper berechnen	3. ganze Zahlen	4. Brüche	5. Formeln umstellen	6. Dreisatz	7. Prozentrechnung	8. Graph – Term	9. Term – Graph	10. Wahrscheinlichkeit
1.	−	+	+	+	+	−	−	−	+	+
2.	−	−	+	−	−	+	+	+	+	+
3.	+	−	+	+	+	+	+	+	−	−
4.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

5.4.2 Implizites Üben

Bei dieser Übungsform werden Basiswissen-Aufgaben aus verschiedenen Inhaltsfeldern miteinander verknüpft.

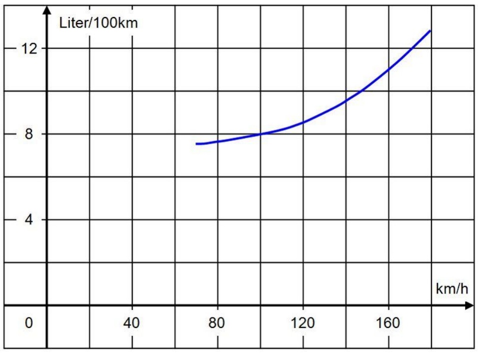
Beispiel:

Der Kraftstoffverbrauch wird für Fahrzeuge durch den durchschnittlichen Verbrauch in Litern (ℓ) auf einer Strecke von 100 Kilometern angegeben. Der Kraftstoffverbrauch eines Autos hängt vor allem von der gefahrenen Geschwindigkeit ab.

a) Das Diagramm zeigt den Kraftstoffverbrauch für ein Auto, das im höchsten Gang gefahren wird. Daher beginnt der Graph bei 70 km/h.

(1) Wie schnell fährt das Auto durchschnittlich, wenn es 11 ℓ auf 100 km verbraucht?

(2) Um wie viel Prozent liegt der Verbrauch bei 180 km/h über dem Verbrauch bei 100 km/h?
Notiere deine Rechnung.



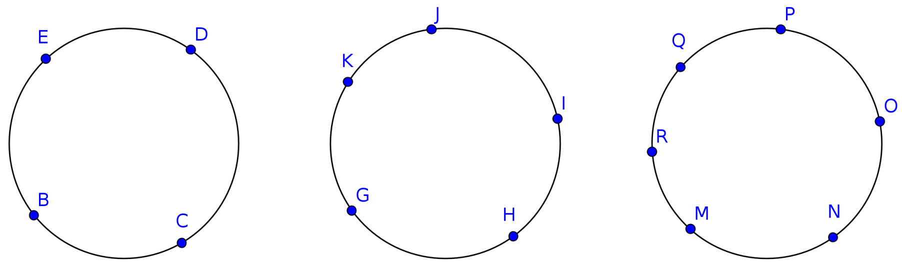
(Zentrale Prüfungen Mathematik 2012, Hauptschule Klasse 10, Typ B, Prüfungsteil 2)

5.4.3 Intelligentes Üben

Zum Lösen der Aufgaben dieses Übungsformats wird ein tieferes Verständnis mathematischer Zusammenhänge vorausgesetzt.

Folgendes Übungsbeispiel wurde in der Projektgruppe erarbeitet:

1. Jeweils auf einem Kreis sind vier, fünf und sechs verschiedene Punkte markiert. Bestimme jeweils die Anzahl der Strecken, mit denen man die vier Punkte B, C, D und E sowie die fünf Punkte G, H, I, J, K und die sechs Punkte M, N, O, P, Q, R verbinden kann.



2. Bestimme die Anzahl der Strecken, mit denen man sieben Punkte, die auf einem Kreis angeordnet sind, verbinden kann (zunächst ohne Zeichnung). Überprüfe das Ergebnis dann durch eine Zeichnung.
3. Hast du eine Gesetzmäßigkeit zur Bestimmung der Streckenanzahl entdeckt? Formuliere sie gegebenenfalls.
4. Gib einen Term zur Berechnung der Streckenanzahl an, wenn n Punkte auf einem Kreis markiert werden.
5. Berechne die Anzahl der Geraden, wenn 12, 20 oder 30 Punkte auf einem Kreis markiert werden.

5.4.4 Produktives Üben

Nach Wittmann (1990) liegt produktives Üben vor, wenn

- der Schüler/die Schülerin veranlasst wird, eigene Denkleistungen zu erbringen, Hindernisse und Widerstände ihm/ihr nicht aus dem Weg geräumt werden. Nur so lernt er/sie, diese zu überwinden,
- an den unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus der Aufgabenstellung sich Lernschwache bis Leistungsstarke beteiligen können (= natürliche Differenzierung);
- Bewusstheit und Verantwortung der Schülerin/des Schülers für ihr/sein Lernen gefördert werden,
- das Lernen und Üben in Sinn-Zusammenhängen erfolgt und dem Wesen der Mathematik und ihren Anwendungen entspricht,
- starke persönliche Beteiligung bei der Erarbeitung von Kenntnissen, Fertigkeiten und Denkstrategien zu viel besseren Langzeiterfolgen führen.

Beispiel:

Der Betreiber eines Kinos mit durchschnittlich 450 Besuchern pro Tag möchte selbst Popcorn herstellen. Er kauft eine Popcorn-Maschine für 280 €. Pro Portion Popcorn benötigt man 50 g Mais, der in 10-kg-Packungen für jeweils 22 € gekauft werden kann. Zusätzlich entstehen für 100 Portionen noch 10 € Nebenkosten (für Öl, Zucker, Salz und Strom).

a) Im Preis für 10 kg Mais sind 7 % Mehrwertsteuer enthalten.

   Wie viel kosten 10 kg Mais ohne Mehrwertsteuer? Notiere deine Rechnung.

b) Zeige, dass das Kino für jeweils 100 Portionen Popcorn mit Kosten von 21 € (für den Mais und die oben angegebenen Nebenkosten) rechnen muss.

Berücksichtigt man die Anschaffungskosten für die Popcorn-Maschine, dann können die gesamten Kosten für x Portionen Popcorn mit der Funktionsgleichung $k(x) = 280 + 0{,}21 \cdot x$ berechnet werden. Bei einem Verkaufspreis von 2.50 € können die Einnahmen mit der Funktionsgleichung $e(x) = 2{,}5 \cdot x$ berechnet werden.

c) Zeichne beide Funktionen in ein Koordinatensystem ein

d) Berechne, ab welcher Anzahl verkaufter Portionen Popcorn die Einnahmen höher sind als die Kosten.

(Zentrale Prüfungen Mathematik 2011, Hauptschule Klasse 10, Typ B, Prüfungsteil 2)

5.4.5 Reflektierende Übungen

Die reflektierende Übung greift Aspekte des intelligenten und produktiven Übens auf, fokussiert jedoch in eine bestimmte Richtung: Übungseffekte sollen für Schüler und Lehrer im Lernprozess transparent sein – verbunden mit klaren Übungszielen – und schließlich als temporales Lernergebnis auch greifbar sein (Bruder 2008a).

Diagnose und individuelle Förderung im Mathematikunterricht (6601)

Beispiele für reflektierende Übungen findet man in Kapitel 3 zum SINUS-Projekt „Diagnose und individuelle Förderung im Mathematikunterricht (6601)“.

5.5 Übungsaufgaben selbst gestalten

Berücksichtigt man die Aussagen aus dem Kapitel Projektbeschreibung und Zielsetzung, Seite 67 f, dann kommt der Wahl von Übungsaufgaben eine große Bedeutung zu. Die Aufgaben sollen motivieren, zum Nachdenken anregen, mathematisch bedeutsam sein usw. In den moderneren Mathematik-Schulbüchern findet man daher immer weniger sogenannte „Plantagenaufgaben“, bei denen die

Übenden über mehrere Teilaufgaben immer wieder dieselben Rechnungen, Termumformungen, Äquivalenzumformungen etc. durchführen sollen.

Nach Leuders (2005) werden beim Automatisieren von Lösungstechniken Sinnzusammenhänge schnell verschüttet: „*Warum* kann man es so machen? *Wozu* ist das gut?“ Solche Zusammenhänge und sinnstiftenden Momente aber braucht man, wenn eine Aufgabe einmal nicht genauso aussieht, wie man sie geübt hat, wenn man die Tätigkeit auf eine etwas andere Situation übertragen muss.

Die Qualität der Übungsaufgaben hat sich in den Schulbüchern schon wesentlich verändert. Mittlerweile findet man anspruchsvolle Aufgaben, die zum Nachdenken anregen und unterschiedliche prozessbezogene Kompetenzen fordern und fördern. Trotzdem wird häufig von Mathematiklehrerinnen und -lehrern kritisiert, dass zu wenig (einfache) Übungsaufgaben in den Schulbüchern vorhanden sind. Will eine Schule nicht die zum Schulbuch passenden Arbeitshefte anschaffen, müssen die Unterrichtenden die Übungsaufgaben selbst entwickeln.

Dies ist auf der einen Seite eine Mehrbelastung, auf der anderen Seite hat es den Vorteil, dass die Aufgaben nun konkret auf den Leistungsstand und das Leistungsvermögen der Schülerinnen und Schüler abgestimmt werden können.

Wer selbst Übungsaufgaben erstellen möchte, sollte in drei Schritten vorgehen. Im ersten Schritt sollte man sich klar machen, welche Ziele mit der Aufgabe verfolgt werden sollen. Dabei stellt man sich die Frage, welche Tätigkeit geübt werden soll.

Prüffragen vorher: Welche Tätigkeit soll geübt werden? (nach Leuders u. a. 2009)

- Das Wiedergeben von Wissen (Zusammenhänge, Bezeichnungen ...) – wenn ja: Welche?
- Das Ausführen eines Verfahrens – wenn ja: Welches?
- Das Anwenden von Begriffen – wenn ja: Welche und auf welche Weise?
- Das Herstellen von Beziehungen – wenn ja: Welche?
- ...

Im zweiten Schritt steht die Kreativität im Vordergrund, wenn man die Aufgaben selbst entwickelt oder geeignete Aufgaben aus Schulbüchern variiert. Um einer Monotonie vorzubeugen, sollten verschiedene Variationstechniken angewandt werden.

Nach der Kreativitätsphase müssen die entwickelten Aufgaben strukturiert werden. In einem dritten Schritt sollten die Aufgaben auf einen weiteren Optimierungsbedarf hin kontrolliert werden. Dieser Optimierungsbedarf könnte sich im Bereich der Effektivität, der Differenzierung, Flexibilität und im Bereich der Reflexivität ergeben.

Falls Nachbesserungen nötig sind, hilft die folgende Liste (nach Leuders u. a. 2009, S. 130-143):

Effektivität optimieren	Aufgaben optimieren … Verändern Sie die Aufgabenstellung, dass Schülerinnen und Schüler auf jeden Fall mehrere Beispiele bearbeiten müssen, z. B. durch direkte Aufforderung.
Differenzierung optimieren	Stellen Sie sicher, dass schwächere Schülerinnen und Schüler die Aufgabenstellung sofort verstehen können. Gegebenenfalls stellen sie eine einfachere, geschlossenere Einstiegsaufgabe mit Beispielcharakter voran.
Flexibilität optimieren	Formulieren Sie die Aufgabe so, dass es sich lohnt, auch einmal vom Ergebnis her zu denken oder einen Wert systematisch durchzuprobieren. Gegebenenfalls fordern Sie explizit dazu auf.
Reflexivität optimieren	Öffnen Sie die Aufgaben ggf. noch ein wenig dafür, dass Schülerinnen und Schüler Entscheidungen treffen können. Oder lassen Sie ein Phänomen verbal beschreiben, vergleichen, begründen …

Insbesondere die Optimierungsmöglichkeiten bezüglich der Reflexivität besitzen ein oft unterschätztes Potenzial. Nach Leuders u. a. (2009, S. 130-143) können viele Päckchen-Aufgaben, die keinen inneren Zusammenhang haben, bei denen die Automatisierung (mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden) im Vordergrund steht, durch Reflektionsfragen oder Reflektionsaufträge aufgewertet werden. Gute Schülerinnen und Schüler erhalten hierdurch eine zusätzliche Herausforderung ohne dass schwächere ausgeschlossen werden. Das Üben der Grundfertigkeiten ist weiterhin – je nach Art der Formulierung der Aufgabenstellung – expliziter oder impliziter Bestandteil der Aufgabe.

In einem Schulbuch könnte man z. B. die folgende Aufgabe finden:

> Berechne.
>
> a) $(+4) + (+11)$ b) $(-4) + (-11)$ c) $(-4) + (+11)$ d) $(+4) + (-11)$

Diese Aufgabe kann durch einen Auftrag zur Reflektion deutlich aufgewertet werden:

> *„Bringe die Aufgaben – ohne zu rechnen – in eine Reihenfolge, das kleinste Ergebnis zuerst. Begründe deine Reihenfolge. Überprüfe durch Rechnung oder Argumentation.“*

5.6 Variationen vorhandener Aufgaben

Eine Möglichkeit, in der Kreativitätsphase eigene Aufgaben zu generieren, besteht darin, interessante Aufgaben aus Schulbüchern zu variieren. Bei der Klassifizierung nach Bruder, Leuders und Büchter 2008 werden die Aufgaben danach unterschieden, inwieweit jeweils Informationen über die Ausgangssituation, den Lösungsweg (bzw. Transformation) und die Endsituation (bzw. Lösung/

Ergebnis) vorliegen. Abhängig davon, zu welchem der drei Aspekte Informationen vorliegen, ergeben sich acht Aufgabentypen. Sie werden in der folgenden Tabelle dargestellt. „+“ bedeutet gegeben bzw. vorhanden und „–“ bedeutet gesucht bzw. nicht verfügbar.

Gegebenes	Transformation	Gesuchtes	Bezeichnung des Aufgabentyps
+	+	+	gelöste Aufgabe, Musteraufgabe, Aufgabe zur Fehlersuche
+	+	−	einfache Bestimmungsaufgabe (Grundaufgabe)
−	+	+	einfache Umkehraufgabe
+	−	+	Beweisaufgabe, Spielstrategie finden
−	−	+	schwierige Umkehraufgabe, Modellierungsproblem mit Zielvorgabe
−	+	−	Aufforderung, eine Aufgabe zu einem gegebenen mathematischen Werkzeug zu finden
+	−	−	schwere Bestimmungsaufgabe, auch: Teil einer gestuften Aufgabe
−	−	−	Problemsituation mit offenem Ausgang

Ausgehend von dieser Klassifizierung können vorhandene Aufgaben leicht variiert werden, indem entsprechende Informationen eingefügt oder weggelassen werden und somit aus einer Aufgabe eines Typs eine Aufgabe eines anderen Typs wird. Die acht Aufgabentypen unterscheiden sich in ihrer Komplexität und sind deshalb sehr gut geeignet, das individuelle Lernen zu fördern. Durch die verschiedenen Aufgabentypen werden leistungsschwächere sowie leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler unterschiedlich stark gefordert.

In einem Schulbuch könnte man die folgende Aufgabe finden:

Rechne im Kopf.

a) $(-5) + (-3)$ b) $(-3) + (-9)$ c) $(-3) + (-6)$ d) $(-3) + (-7)$

Die Aufgaben wurden von Mitgliedern unserer Projektgruppe in zwei Aufgabenformen variiert. Die mit „a“ gekennzeichneten Aufgaben wurden direkt variiert und bei den mit „b“ gekennzeichneten Aufgaben wurde zusätzlich ein möglicher Kontext angegeben.

1a	+++	Man addiert (-5) und (-3), indem man das gemeinsame Vorzeichen setzt und die Beträge addiert. Rechnung: $(-5)+(-3) = -(5+3) = -8$. Erläutere die Vorgehensweise mit eigenen Worten.
1b	+++	Leona hat sich zuerst 2 € von Patrick geliehen und später noch einmal 6 €. Jetzt gibt sie ihm 7 € zurück und meint, ihre Schulden damit beglichen zu haben. Patrick ist nicht einverstanden.
2a	++–	Addiere die beiden Zahlen (-8) und (-9), indem du ihre Beträge addierst und das gemeinsame Vorzeichen setzt.
2b	++–	Paul leiht sich erst 3 € und später noch einmal 7 €. Addiere die Beträge und gib an, wie viel Geld er zurückzahlen muss.
3a	–++	Welche Zahl muss man zu (-5) addieren, um (-8) zu erhalten?
3b	–++	Mehmet hat sich von seinem Vater erst 2 € geliehen und später noch einmal etwas. Nun soll er seinem Vater 8 € zurückgeben. Wie viel hatte Mehmet sich beim zweiten Mal geliehen?
4a	+–+	Addiert man die Zahlen (-8) und (-9), erhält man die Summe (-17). Gib den Rechenweg an.
4b	+–+	Sina hat sich gestern von Tom 8 € geliehen. Heute bettelt sie ihn schon wieder um 9 € an. Nun hat sie 17 € Schulden. Wie ist sie darauf gekommen?
5a	+––	Berechne $(-3) + (-7)$.
5b	+––	Sina hat sich gestern von Tom 3 € geliehen. Heute bettelt sie ihn schon wieder um 7 € an. Wie viel muss sie ihm nun insgesamt zurückgeben?
6a	––+	Die Summe zweier negativer Zahlen beträgt (-8). Gib die Summanden an, die zu der Summe gehören.
6b	––+	Kevin: „Wenn ich von Sina und Tom mein Geld zurück bekomme, kann ich heute Abend für 16 € ins Kino gehen.“ Wie viel Schulden hat jeder von beiden?
7a	–+–	Du weißt, dass man rationale Zahlen mit gleichem Vorzeichen addiert, indem man ihre Beträge addiert und das gemeinsame Vorzeichen setzt. Formuliere geeignete Beispielaufgaben sowohl mit positiven als auch negativen Zahlen.
7b	–+–	Wenn du an zwei Freunde Geld verleihst, dann fehlt dir die Summe der verliehenen Beträge in deiner Geldbörse. Gib Beispiele an.
8a	–––	Denke dir eine Aufgabe zur Addition zweier negativer Zahlen aus und löse sie.
8b	–––	Denk dir eine Geschichte zum Verleihen von zwei Geldbeträgen aus.

Blütenaufgaben in www.mister-mueller.de (6646)

Siehe auch Bruder, Leuders und Büchter (2008). Weitere Beispiele sind im Internet zu finden unter www.mister-mueller.de

5.7 Aufgabenvariationen zum Thema „Lösen von quadratischen Gleichungen“

Ein anderes Variationsbeispiel, welches in unserem Projekt erarbeitet wurde, wird im Folgenden dargestellt. Dabei sind die Unterpunkte a), b) … nicht als zusammengehörende Aufgabenteile, sondern als unterschiedliche Ideen oder verschiedene Schwierigkeitsgrade zu verstehen.

Begründungsaufforderung
Die quadratische Gleichung $x^2 + 3x = 10$ hat die Lösungen 2 und -5. Zeige, dass dies richtig ist.
Begründe, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Aufgabenumkehr

a) Die Lösungen für die Gleichung $x^2 + 3x = 10$ sind 2 und -5.
Finde weitere quadratische Gleichungen mit diesen Lösungen.

b) Eine quadratische Gleichung hat die Lösung 2.
Gib mehrere Gleichungen mit dieser Lösung an.

c) Welche quadratischen Gleichungen haben nur die Lösung 2?

Explorationsauftrag

a) Gegeben sei die quadratische Gleichung $a \cdot (x^2 + 3x - 10) = 0$.
Wie verändern sich die Lösungen der Gleichung, wenn du verschiedene Werte für a wählst?

b) Gegeben sei die quadratische Gleichung $x^2 + 3x + c = 0$.
Nenne einen Wert für c, so dass die Gleichung 2 Lösungen hat.
Finde den Wert für c, so dass die Gleichung keine Lösung hat.
Kannst du einen Wert für c nennen, so dass die Gleichung eine Lösung hat?

Aufgaben erfinden lassen
Nenne drei quadratische Gleichungen, die sich durch Ausklammern (der Lösungsvariablen) lösen lassen.

Fehler finden
Finde die Fehler in Fritzchens Lösung:

a) $2x^2 - 9x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(x-9) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $x = 9$

b) $x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

Anwendungssuche

a) Erfinde ein Zahlenrätsel, dass zu der quadratischen Gleichung $x^2 + 3x = 10$ passt.

b) Skizziere ein Rechteck, das die quadratische Gleichung erläutert.
   i) $x(x+3) = 10$
   ii) $x^2 + 3x = 10$

c) Finde eine geometrische Darstellung, die die quadratische Gleichung erläutert.
   i) $x(x+3) = 10$
   ii) $x^2 + 3x = 10$

Fragen stellen
Der Anhalteweg eines PKW setzt sich zusammen aus dem Bremsweg und der Strecke, die während der Reaktionszeit zurückgelegt wird. (Die Reaktionszeit ist die Zeit vom Erkennen der Gefahr bis zu dem Beginn des Bremsvorgangs.) Der Anhalteweg in m kann grob mit dem Term $(0{,}1x)^2 + 0{,}3x$ bestimmt werden, wobei x die Geschwindigkeit in km/h ist, die das Fahrzeug beim Erkennen der Gefahr hatte. Formuliere geeignete Fragestellungen!

Informationen weglassen
Eine quadratische Funktion f, mit $f(x) = x^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, hat die Nullstelle 3. Wie lautet der Funktionsterm? Fällt dir was auf?

Stellungnahme
Der Anhalteweg eines PKW setzt sich zusammen aus dem Bremsweg und der Strecke, die während der Reaktionszeit zurückgelegt wird. (Die Reaktionszeit ist die Zeit vom Erkennen der Gefahr bis zu dem Beginn des Bremsvorgangs.) Der Anhalteweg in m kann grob mit dem Term $(0{,}004 \cdot x)^2 + 0{,}3 \cdot x$ bestimmt werden, wobei x die Geschwindigkeit in km/h ist, die das Fahrzeug beim Erkennen der Gefahr hatte.

Herr Müller fuhr mit der Geschwindigkeit 50 km/h auf eine ampelgesteuerte Kreuzung zu. 30 m vor der Ampel schaltet diese auf gelb. Herr Müller entschied sich nicht zu bremsen. Hinter der Ampel wurde er von der Polizei angehalten, weil er die rote Ampel nicht beachtet habe. Er behauptete, dass er nicht mehr hätte bremsen können.

Aufgabenvariationen
Kategorisieren
„Gleichungspool" vorgeben mit Gleichungen in faktorisierter Form, reinquadratischen Gleichungen, Gleichungen in Normalform usw.

1. Finde die für dich leichteste und schwierigste Aufgabe. Begründe!
2. Ordne die quadratischen Gleichungen den Lösungsverfahren zu, die man anwenden kann, um die Gleichung zu lösen.

5.8 Hilfe und Kontrolle

Sinnvolles Üben verlangt eine Rückmeldung der Sinnhaftigkeit und Korrektheit des Lösungsweges und des gefundenen Ergebnisses einer Übungsaufgabe. Ratlosigkeit bzw. Hilflosigkeit beim Üben ist demotivierend und kontraproduktiv. Jede Lehrperson hat in Übungsphasen schon frustrierte Schülerinnen und Schüler erlebt, die mit der Aussage „Das kann ich nicht!" oder „Die Aufgabe verstehe ich nicht!" ihre Passivität zu erklären versuchten. Entsprechendes gilt für die Kontrolle von Hausaufgaben. Manchmal reicht schon ein kleiner Denkanstoß, damit Schülerinnen und Schüler selbstständig einen sinnvollen Lösungsweg für eine Mathematikaufgabe finden.

Für die Durchführung von Übungsphasen sind unserer Meinung nach folgende Aspekte zu beachten:

- Die Aufgabenstellung sollte für alle verständlich sein. Ggf. sollte die Aufgabe vorgelesen werden, um im Anschluss daran Verständnisfragen zu klären.
- Übungen sollten in Partner-oder Gruppenarbeit durchgeführt werden, damit bessere Schülerinnen und Schüler Schwächeren helfen können. Es darf allerdings nicht nur abgeschrieben werden.
- Zur Unterstützung sollte/n
  - die Lehrperson für Fragen zur Verfügung stehen,
  - ein Hilfesystem (Schulbuch, eigene Aufzeichnungen, Hilfekarteikarten (siehe z. B. *Wege zum selbstregulierten Lernen*, S. 111 ff.), Musterlösung usw.) vorhanden sein,
  - individuelle Lösungswege gewürdigt werden,
  - Lösungswege miteinander verglichen und erläutert werden,
  - richtige Ergebnisse mitgeteilt werden und
  - gegebenenfalls Aufgaben von Schülerinnen und Schülern vorgerechnet werden.

Eine konzeptionelle Einordnung und Reflexion zum selbstregulierten Lernen finden sich in dem SINUS-Transfer-Band *Wege zum selbstregulierten Lernen*, S. 208 ff.

5.9 Ausblick

In sehr heterogenen Lerngruppen gestaltet es sich oft schwierig, für jede Schülerin und jeden Schüler geeignete Übungsaufgaben zu finden, die ihrem Leistungsstand entsprechen und ihnen während der Übungsphase die optimale Unterstützung bieten. In einem weiteren SINUS-Projekt sollten deswegen Konzepte für den Unterricht in sehr heterogenen Lerngruppen erarbeitet werden.

Weitere Beispiele für Übungsaufgaben, Hilfen und Musterlösungen zu diesem Projekt finden Sie unter www.sinus.nrw.de.

Sinnvolles Lernen im Mathematikunterricht (6647)

5.10 Literaturliste

Bruder, Regina (2008a). „Üben mit Konzept". In: *mathematik lehren* 147, S. 4–11.

Bruder, Regina (2008b). „Wider das Vergessen. Fit bleiben durch vermischte Kopfübungen." In: *mathematik lehren* 147, S. 12–14.

Bruder, Regina, Timo Leuders und Andreas Büchter (2008). *Mathematikunterricht entwickeln, Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten*. Cornelsen.

Büchter, Andreas und Timo Leuders (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln*. Cornelsen.

Direktion für Erziehung Kultur und Sport des Kantons Freiburg, Schweiz, Hrsg. (2009). *Hausaufgaben geben – erledigen – betreuen, Vom erfolgreichen Umgang mit Hausaufgaben*. Lehrmittelverlag Freiburg, Schweiz.

Helmke, Andreas (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. Franz Emanuel Weinert gewidmet. Neubearb., 1. Aufl.* Hrsg. von Franz E. Weinert. Seelze-Velber: Kallmeyer u.a., S. 436.

Heymann, Hans W. (1998). „Allgemeinbildender Mathematikunterricht – was könnte das sein?" In: *mathematik lehren* 33, S. 4–9.

Höhmann, Katrin und Heinz Günter Holtappels, Hrsg. (2006). *Ganztagsschule gestalten. Konzeption – Praxis – Impulse*. Kallmeyer Verlag.

Keck, Rudolf W. (1978). *Schulversuche und Schulreform. Berichte – Analysen – Ergebnisse*. Hrsg. von Niedersächsisches Kultusministerium. Hermann Schroedel Verlag.

Kohler, Britta (2005). „Unterrichtsqualität: Wie geht das? Fragen und Tipps." In: *Schulmagazin 5 bis 10* 73.10, S. 53–56.

Leuders, Timo (2005). „Intelligentes Üben selbst gestalten! Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht." In: *Pädagogik (Weinheim)* 57.11, S. 29–32. URL: https://www.ph-freiburg.de/fileadmin/dateien/fakultaet3/mathe/Mathe_fuer_alle/Leuders_Intelligentes_Ueben_selbst_gestalten_Vorabdruck.pdf (besucht am 18. 09. 2013).

Leuders, Timo u. a. (2009). *Mathe magische Momente*. Hrsg. von Timo Leuders, Lisa Hefendehl-Hebeker und Georg Weigand. Ein Projekt der GDM und der Deutschen Telekom Stiftung. Berlin: Cornelsen.

Meyer, Hilbert (2004). *Was ist guter Unterricht*. Cornelsen.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, Hrsg. (2007). *Wege zum selbstregulierten Lernen*. Klett Verlag.

Pressemitteilung der technischen Universität Dresden (2008). URL: http://tu-dresden.de/aktuelles/newsarchiv/2008/02/hausaufgaben (besucht am 18. 10. 2013).

Wittmann, Erich Ch. (1990). „Wider die Flut der ‚bunten Hunde' und der ‚grauen Päckchen': Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens." In: *Handbuch produktiver Rechenübungen Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Hrsg. von Erich Ch. Wittmann und Gerhard N Müller. Bd. 1. Klett, S. 152–166.

6 Spiralcurriculum Stochastik Sekundarstufe I

Ulrich Brauner

Spiralcurriculum Stochastik SI (6686)

Stochastik ist ein verpflichtendes Handlungsfeld in den kompetenzorientierten Lehrplänen der Sekundarstufe I. Das SINUS-Projekt soll Unterstützung bieten bei der Umsetzung der Vorgaben in schulische Curricula. Die Zielsetzung des Stochastikunterrichts, die über die Jahrgänge hinweggehende Verzahnung und der damit verbundene zunehmende Kompetenzaufbau im Bereich Stochastik, sowie die Verbindung zu anderen Kompetenzbereichen werden aufgewiesen. Dabei werden konkrete Vorschläge zu Unterrichtseinheiten bis hin zur Ebene von Arbeitsblättern gemacht.

Das Spiralcurriculum Stochastik wurde durch eine Projektgruppe von drei Gymnasial- und vier Gesamtschullehrern mit Unterstützung von Professor Andreas Büchter (Universität Köln) entwickelt. Ausgehend von den Kernlehrplänen aller Schulformen wird zunächst die Zielsetzung des Stochastikunterrichts der Sekundarstufe I formuliert. Anschließend wird aufgezeigt, wie die in der Zielsetzung genannten Kompetenzen im Verlauf der Sekundarstufe I schrittweise aufgebaut und vertieft werden können. Es werden konkrete Unterrichtsvorhaben dokumentiert, die diesen Kompetenzaufbau ermöglichen und gleichzeitig den Stochastikunterricht „aus der (Glücks-)Spielecke“ herausholen, indem anwendungsorientiere, relevante Themen angesprochen werden. Die spiralcurriculare Verzahnung im Bereich der Stochastik, sowie auch die Verzahnung mit anderen Kompetenzbereichen (Algebra, Funktionen, Geometrie, Argumentieren, Problemlösen, Modellieren) werden ausgewiesen. Für jedes Unterrichtsvorhaben wird ein Zeitbedarf angegeben.

6.1 Zielsetzung des Stochastikunterrichts der Sekundarstufe I

Stochastik begegnet uns beim täglichen Blick in die Zeitung z. B. in Form von Diagrammen zur Darstellung von Untersuchungs- und Umfrageergebnissen oder in Form der Regenwahrscheinlichkeit. Noch viel wichtiger kann es für den Einzelnen sein, aus den Nebenwirkungswahrscheinlichkeiten auf dem Beipackzettel eines Medikaments richtige Schlüsse ziehen zu können.

Alle Schülerinnen und Schüler müssen also fundierte Kompetenzen im Bereich der Stochastik erwerben, um diese Daten und Wahrscheinlichkeiten interpretieren zu können. Der Kompetenzaufbau muss in der Sekundarstufe I erfolgen.

Ziel des Stochastikunterrichts der Sekundarstufe I ist, dass die Schülerinnen und Schüler Daten und ihre üblicherweise vorkommende Darstellung sowie Wahrscheinlichkeiten vor dem Hintergrund des jeweiligen Sachkontextes (Chancen, Risiken, Prognosen …) beurteilen/ hinterfragen und als Basis für Entscheidungen nutzen können.

Das bedeutet, dass sie

- Daten, die ihnen in Text-, Tabellen- oder Grafikform oder auch durch Kennwerte in reduzierter Form präsentiert werden (z. B. Umfrageergebnisse), lesen und hinsichtlich der folgenden Aspekte hinterfragen: Art der Darstellung, Fragestellung, Stichprobenumfang und Repräsentativität der Stichprobe.
- einen tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriff entwickeln, diesen in Anwendungssituationen (z. B. Spiele, Medizin, Wirtschaft, Politik …) verstehen und zur begründeten Entscheidung nutzen.

6.2 Spiralcurriculum

Zum Aufbau der Kompetenzen wird das folgende Spiralcurriculum vorgeschlagen. Es ist von allen Mitgliedern der Projektgruppe auf Praxistauglichkeit erprobt worden. Bei der Angabe der Schulwochen wird von vierstündigem Unterricht, bezogen auf die Einheit 45 Minuten, ausgegangen.

Der jeweilige **Titel** der Unterrichtseinheit ist dabei **fett** gedruckt, die damit verbundene Schlüsselfrage ist rot dargestellt und die fachlichen *Inhalte kursiv* ausgewiesen.

JGS	Unterrichtseinheit	Vernetzung	vertikale Vernetzung	Zeitbedarf in Schulwochen
5	**Wir lernen uns kennen**		Grundschule	
	Wie viele Geschwister hast du? → *Ur- und Strichlisten, Säulendiagramme*	ggf. Erweiterung: Grafik in der Tabellenkalkulation		2 SW
	Sind die Mädchen oder die Jungen größer? → *Spannweite, Median* → *ggf. arithmetisches Mittel propädeutisch*			1 SW
	ggf.:			
	Wie können wir die Längen unserer Schulwege übersichtlich darstellen? → *Klassenbildung*	Längen – Längenumrechnung		

JGS	Unterrichtseinheit	Vernetzung	vertikale Vernetzung	Zeitbedarf in Schulwochen
5	**Wir vermessen uns**			
	Wie weit reicht eine Menschenkette aus allen Schülern unserer Klasse / unseres Jahrgangs? → *Anwendung von Kenndaten, Umgang mit Genauigkeit* → *ggf. Festlegung von Maßeinheiten – „Fuß“*			1 SW
5/6	**Wie können wir auslosen?**		Grundschule	
	Welches Zufallsgerät benutzen wir?	Bruchvorstellung, Bruchrechnung		1 SW
	oder:			
	Wir stellen unseren Glückswürfel her		Grundschule	
	Wir stellen ein Zufallsgerät her.	Geometrie, Winkelmessung		1/2 SW
	ggf.:			
	Wie können wir einen Kreisel bauen, mit dem wir „würfeln“ können? → *Zufallsgeräte nur Laplace* → *relative Häufigkeiten zur Prognose nutzen* → *Anteilsvorstellung im Rahmen der Bruchvorstellung* → *Bruchvergleich* → *Laplace-Wahrscheinlichkeit*			1/2 SW
6	**Wir stellen Daten mit Kreisdiagrammen dar**			
	Wie können wir die Daten als Kreisdiagramm darstellen? → *Kreisdiagramme*	Geometrie, Winkelmessung	Darstellung von Daten JGS 5	1/2 SW

JGS	Unterrichtseinheit	Vernetzung	vertikale Vernetzung	Zeitbedarf in Schulwochen
6	**Die jüngere Mannschaft**			
	Wie können die Tabellenwerte mithilfe einer Zahl dargestellt werden? → *arithmetisches Mittel* *Wie unterscheiden sich die verschiedenen Mittelwerte?* → *arithmetisches Mittel, Median* → *inhaltliche Seite der Mittelwerte*	Arithmetik, Rechnen mit Dezimalbrüchen Übungen zur Arithmetik (technische Seite des arithmetischen Mittels)		1 SW
7	**Wer knackt den Code?**			
	Wie können wir eine geheime Botschaft entschlüsseln? → *absolute/relative Häufigkeit, Gesetz der großen Zahl (hier auch Simulation), Säulendiagramme, statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff, Vergleich der WSK Begriffe* → *Erwartungswert*	Bruch- und Dezimalbruchrechnung, Prozentrechnung, Koordinatensysteme ggf. Tabellenkalkulation, Textverarbeitung	Darstellung von Daten JGS 5 Wahrscheinlichkeitsbegriff JGS 6	2 SW
	oder: **Wir untersuchen das Schweinewürfeln-Spiel** Ist die Punkt-Wertung beim Spiel Schweinewürfeln gerecht?			
	oder: **Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Medizin** Zu Risiken und Nebenwirkungen …			

JGS	Unterrichtseinheit	Vernetzung	vertikale Vernetzung	Zeitbedarf in Schulwochen
8	**Was machen wir / Jugendliche in der Freizeit?**			
	Wie können wir das Freizeitverhalten mithilfe einer Befragung ermitteln? → *Planung, Durchführung, Auswertung einer Umfrage*	ggf. fächerübergreifend Tabellenkalkulation	Gesetz der großen Zahl JGS 7 Darstellung von Daten JGS 5/6	2 SW
	Wie können wir Befragungsergebnisse übersichtlich darstellen und vergleichen? → *Boxplots, Streuungen*			1 SW
9/10	**Mehrstufige Zufallsversuche** in vielfältigen Anwendungen (Krankheitsscreening, medizinische Untersuchungsergebnisse …)			
	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person tatsächlich erkrankt ist, wenn sie ein ‚positives' Testergebnis hat? (Mammographie, AIDS, Hepatitis) → *Baumdiagramme und Pfadregeln bedingte WSK*	ggf. fächerübergreifend	Wahrscheinlichkeitsbegriff JGS 6/7	3 SW
	oder:			
	Dunkelfeldforschung			
	Wie können Befragungen zu heiklen Fragen durchgeführt werden, so dass die Antwort der einzelnen Befragten verborgen bleibt? → *Laplace- und stat. Wahrscheinlichkeit*			

JGS	Unterrichtseinheit	Vernetzung	vertikale Vernetzung	Zeitbedarf in Schulwochen
	oder:			
9/10	**Auseinandersetzung mit statistischen Darstellungen in Medien (Zeitung, Internet) z. B.** Krebs durch Kernkraftwerke? → *Anwendung beschreibender Statistik*			
	oder: **Wie lüge ich mit Statistik?**			
	Wie kann ich erkennen, dass mit einer Grafik oder statistischen Kennwerten manipuliert wird? → *Manipulationen von Ergebnissen statistischer Erhebungen bei Grafiken und mittels Kennwerten*		Darstellung von Daten JGS 5 bis 8	1 SW
	Erweiterungsthemen: Simulationen z. B. π-Bestimmung, Ziegenproblem, Versicherungsmathematik			

6.3 Konkretisierte Unterrichtseinheit

Exemplarisch wird im Folgenden eine der im Curriculum genannten Unterrichtseinheiten dokumentiert.

Spiralcurriculum Stochastik (6608)

Alle im Curriculum aufgeführten Unterrichtseinheiten werden in gleicher Weise dargestellt: Die Konkretisierung bietet den Überblick über die Unterrichtseinheit einschließlich der Lehrplanbezüge und Vorschlägen zur konkreten unterrichtlichen Umsetzung. Dort wird auf die weiteren Materialien, z. B. Arbeitsblätter oder Literatur verwiesen. Die ergänzenden Materialien sind mit fortlaufender Nummerierung im Internet zum Herunterladen bereitgestellt. Die Nummerierung greift als erstes die Jahrgangsstufe (JGS) und anschließend die mögliche Position in der Unterrichtsreihe auf: 8-2-1 bedeutet JGS 8, zweite Unterrichtseinheit, erstes Material.

6.3.1 Konkretisierung: „Wer knackt den Code?“ (JGS 7)

Schlüsselfrage: Wie können wir eine geheime Botschaft entschlüsseln?

Handreichung: Wer knackt den Code? M-07-1 (6628)

Kernlehrplanbezug

Stochastik Daten werden erhoben und mit Hilfe einer Tabellenkalkulation erfasst. Relative Häufigkeiten von langen Versuchsreihen werden zur Schätzung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Die so ermittelten Wahrscheinlichkeiten werden dann wieder zur Schätzung von Häufigkeiten verwendet.

Argumentieren / Kommunizieren Vergleichen und Begründen verschiedener Lösungen

Problemlösen Vermutungen aufstellen und Prüfung mehrerer Lösungsmöglichkeiten

Werkzeuge Nutzen von Standardsoftware (Tabellenkalkulation, Textverarbeitung)

Unterrichtliches Vorgehen

Kernidee Absolute und relative Häufigkeit von Buchstaben eines Textes werden bestimmt. Bei genügend großen Texten ergeben sich hieraus Voraussagen über die relative Häufigkeit einzelner charakteristischer Buchstaben, die zur Dekodierung eines verschlüsselten Textes genutzt werden.

Organisation Arbeit in Schülergruppen mit verschiedenen Texten zunächst mit nur einem Buchstaben, später arbeitsteilig für verschiedene Abschnitte des Alphabets. Ggf. Einsatz von Standardsoftware zum schnellen Durchsuchen von Texten.

Material Handreichung: Wer knackt den Code? M-07-1 (6628)

Notwendige Vorbereitungen z. B. Computerraum buchen, Briefklammern, Scheren …

Detaillierte Unterrichtsplanung

26. Geheimschriften ver- und entschlüsseln – Caeser-Code

→ Arbeitsblatt 1 auf Seite 93

Ein mithilfe einer Buchstabenverschiebung (Caesercodierung) verschlüsselter Text soll entschlüsselt werden. Die Caesercodierung wird erläutert und ausprobiert. Hierzu eignet sich die Herstellung einer Caeserscheibe (Anbindung an Geometrieunterricht ist möglich).

27. Buchstabenhäufigkeiten untersuchen

→ Arbeitsblatt 2 auf Seite 94

Die Idee der Entschlüsselung über die Buchstabenhäufigkeit wird entwickelt. Die absolute Häufigkeit des Buchstabens „e" in einem (normalen) deutschen Text (z. B. aus dem Deutschbuch) wird relativ zur variierenden Länge des Textes gezählt. Die relativen Häufigkeiten werden berechnet und ein Diagramm wird gezeichnet, in dem die relativen Häufigkeiten des „e" gegen die Textlänge aufgetragen werden.

Ergebnis: Die relativen Häufigkeiten stabilisieren sich für große Textlängen.

Verschiedene Schülergruppen arbeiten mit verschiedenen Texten. Die entstehenden Diagramme werden verglichen.

Ergebnis: Unabhängig vom Text ist die relative Häufigkeit des Buchstaben „e" in einem deutschen Text bei großer Textlänge annähernd gleich.

28. Geheimtext entschlüsseln

→ Arbeitsblatt 3 auf Seite 95

In deutschen Texten hat „e" die größte relative Häufigkeit aller Buchstaben. Daher kann nun im verschlüsselten Text nach dem häufigsten Zeichen gesucht werden. Ist der verschlüsselte Text durch eine einfache Verschiebung entstanden, reicht es aus, die Caeserscheibe so einzustellen, dass das am häufigsten vorkommende Zeichen dem Klartextbuchstaben „e" entspricht.

29. Ergänzung: Häufigkeitsdiagramm für alle Buchstaben

→ Arbeitsblatt 4 auf Seite 96

Falls der Geheimtext nicht durch eine einfache Verschiebung entstanden ist, reicht die Kenntnis der „e"-Häufigkeit nicht zur Entschlüsselung aus. Nun müssen die relativen Häufigkeiten aller Buchstaben des Alphabets bestimmt werden. Hierbei ist der Einsatz von Standardsoftware sehr hilfreich und zeitsparend und auch in hohem Maße motivierend. Die Entschlüsselung des Textes erfolgt schrittweise und fördert und erfordert eine gute Problemlöse- und Argumentationsfähigkeit.

30. Ergänzung: Geheimschriften und das Gesetz der großen Zahlen

→ Arbeitsblatt 5 auf Seite 97

→ Arbeitsblatt 6 auf Seite 98

Lösungsmöglichkeiten bei der Entschlüsselung eines Textes, bei dem andere Verschlüsselungstechniken eingesetzt wurden, werden im Material dargestellt. Mathematisch ergibt sich hier eine interessante Anwendung des kgV.

6.3.2 Arbeitsblätter zu „Wer knackt den Code?“

AB: Geheimschriften ver- und entschlüsseln M-07-1-1 (6609)

1. Geheimschriften ver- und entschlüsseln

Caesar-Code

Julius Caesar hat viele Kriege geführt und dabei Botschaften an seine Soldaten in Geheimschrift verfasst. Die dazu verwendete Geheimschrift ist sehr einfach: Die Buchstaben werden einfach um eine feste Zahl von Stellen im Alphabet verschoben. Beispiel: Wenn das Geheimalphabet um 3 Stellen verschoben wird, wird aus dem Klartext „a“ ein geheimes „D“.

Klar	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Geheim	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Das bedeutet, dass aus z. B. dem „m“ im normalen „Klartext“ ein „P“ wird. Du hast sicher schon gemerkt, dass zur Unterscheidung von Klartext und verschlüsseltem Text die Klartexte immer aus kleinen Buchstaben, die verschlüsselten Texte immer aus großen Buchstaben bestehen.

Aus dem Wort „caesar“ wird auf diese Weise: FDHVDU Wenn du einen solchen Geheimtext entschlüsseln willst, gehst du einfach umgekehrt vor. Vielleicht wollte Caesar ja einen Freund warnen und hat ihm geschrieben:

Geheimtext:	W U D X H Q L H G H P E U X W X V
Klartext:	

Aufgabe: Schreibe nun selbst eine kleine Nachricht in Caesars Geheimschrift und lasse sie von deinem Nachbarn entschlüsseln.

2. Buchstabenhäufigkeiten untersuchen

Normalerweise weiß man nicht, um wie viele Buchstaben der Geheimtext gegenüber dem Klartext verschoben wurde. Um das herauszufinden, müssen wir zuerst eine Zwischenüberlegung machen.

Aufgabe: Arbeite allein!

- Wie viele „e“ sind in einem (normalen) deutschen Text zu erwarten?
- Zähle die „e“ in einem 50 Zeichen langen beliebigen Text z. B. aus deinem Deutsch- oder Mathebuch. Trage den Wert in die Tabelle ein.
- Zähle nun, wie viele „e“ in einem Text, der 100, 200, 300 und 400 Zeichen lang ist, vorhanden sind. Ergänze die Tabelle.
- Berechne jeweils die *relative Häufigkeit* des „e“. *Dazu dividierst du die Anzahl der gezählten „e“ durch die Länge des Textes.*
- Führe eine Tabelle:

Textlänge	50	100	200	300	400	600	800	1000	1200
Anzahl der „e“									
relative Häufigkeit der „e“									

Aufgabe: Arbeite nun in der Gruppe:

- Vergleicht die relativen Häufigkeiten. Was stellt ihr fest? Formuliert einen Satz: „Die relativen Häufigkeiten ...“.
- Ergänzt gemeinsam die Tabelle, ohne noch einmal zu zählen. Wie könnt ihr das erreichen?
- Zeichnet ein Diagramm, bei dem auf der x-Achse die Zahl der Buchstaben der Texte (also 100, 200, 300 ...) und auf der y-Achse die relative Häufigkeit des Buchstaben „e“ steht.
- Was fällt euch dem Diagramm auf?
- Könnt ihr eine Voraussage machen, wie viele „e“ in einem 5000 Buchstaben langen Text sind?

Vergleicht eure Ergebnisse:

- Betrachtet dazu die Tabellen für die relativen Häufigkeiten des Buchstaben „e“ und das Diagramm.

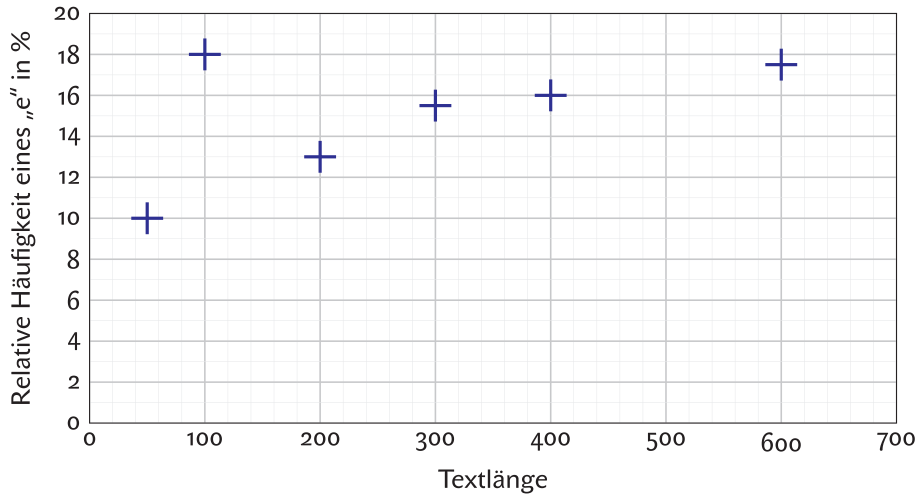
Beantwortet folgende Fragen gemeinsam:

- Kann es sein, dass die Tabellenwerte sich sehr stark unterscheiden? Begründe!
- Für längere Texte sind die Tabellenwerte (fast) gleich. Wie viel Prozent eines normalen Textes besteht aus dem Buchstaben „e“?

- Der folgende Text hat 207 Buchstaben. Berechne, wie viele „e" er enthalten sollte. Untersuche den Text auf „e"s. Nimm Stellung!

> Durch Luft schwang sich Uhu, Kauz, Kolibri, Kuckuck, Gans und Kakadu war völlig unabhängig von Wald, Bach und Land. Nahrung war immer da: So fraß Uhu und Gans Maus und Gras. Huhn nahm Korn zu sich und Kolibri Honig. Doch: War historisch Huhn vor Ovum?

- Euer Diagramm könnte etwa so aussehen:



Wie lang sollte ein normaler Text sein, damit die relative Häufigkeit des Buchstaben „e" sich beim weiteren Zählen praktisch nicht mehr ändert?

3. Geheimtext entschlüsseln

> NBPRKCWDAMANRBXACNWEXWVJCQNVJCRTUNQANAW
> BXULQNMRNKRBMANRIJNQUNWTXNWWNW
> DWMBXULQNMRNMJBWRLQCTXNWWNW

- Notiere in einer Strichliste, wie oft die einzelnen Buchstaben im Geheimtext vorkommen.
- Gib jetzt in einer Tabelle mit den Buchstaben von A bis Z die absoluten Häufigkeiten an.

- Zeichne dazu ein Balkendiagramm.
- Überführe die Tabelle in eine Rangliste.
- Schreibe nun dein Caesar–Alphabet so, dass so der häufigste Buchstabe des Geheimtextes dem Buchstaben „e“ des Klartextes entspricht und entschlüssele den Text.

Klar	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Geheim																										

Der Klartext lautet:

____

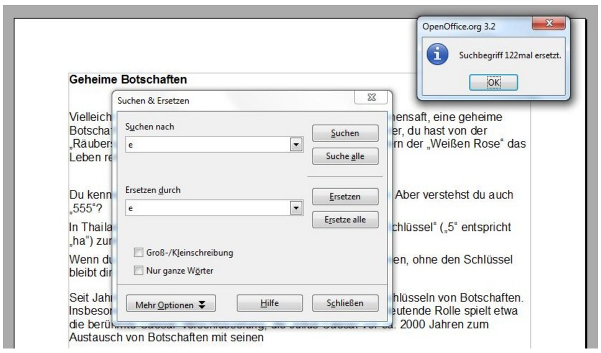
____

____

4. Erstelle ein Häufigkeitsdiagramm für alle Buchstaben mit Hilfe des Computers.

Verschlüsselungen sind häufig nicht so einfach wie das einfache Verschieben von Buchstaben. Um auch da weiterzukommen, muss man für jeden Buchstaben wissen, wie häufig er „normalerweise“ in einem Text vorkommt.

- Kopiere einen beliebigen Text (aus dem Internet) in ein „Writer“-Dokument.
- Nutze die Tastenkombination „STRG + F“ (gleichzeitig drücken[a]) zum „Suchen und Ersetzen“ und ersetze einen Buchstaben (z. B. „e“) durch den gleichen Buchstaben. Dadurch wird der Text nicht verändert. Wenn du nun auf „Ersetze alle“ klickst, erscheint ein Fenster, in dem die Anzahl der Ersetzungen abgelesen werden kann.



- Führe eine Liste in der Tabellenkalkulation:

Buchstabe	Anzahl
a	...
b	...
c	

- Summiere die Anzahl aller Buchstaben des Textes. (Nutze die Befehle der Tabellenkalkulation).
- Berechne nun die relativen Häufigkeiten für jeden Buchstaben. Nutze wieder die Befehle der Tabellenkalkulation.
- Erstelle anschließend ein Häufigkeitsdiagramm (Säulendiagramm) für die Buchstabenhäufigkeit eines Textes.
- Vergleiche dein Ergebnis mit dem deines Nachbarn!
- Falls du noch Zeit hast, erstelle ein Häufigkeitsdiagramm der Buchstaben in einem englischen Text. Gehe dabei genauso vor.

[a] Falls du ein anderes Textverarbeitungsprogramm verwendest, ist evtl. eine andere Tastenkombination zu drücken. Finde dies selbstständig heraus!

5. Geheimschriften und das Gesetz der großen Zahlen

Wenn man viele Buchstaben zählt, verändert sich die relative Häufigkeit, mit der ein Zeichen (z. B. „e“) vorkommt, praktisch nicht mehr. Man nennt diese relative Häufigkeit dann die statistische Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen des Buchstabens.

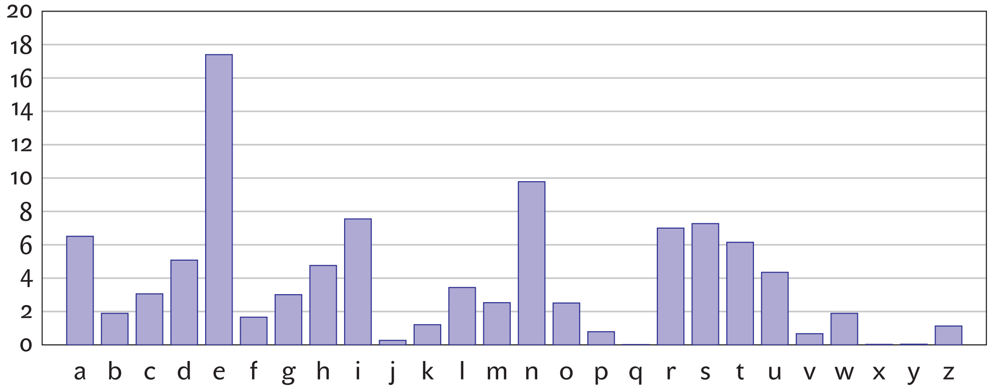
Entsprechendes gilt, wenn ein Würfel oft geworfen wird:
Die relative Häufigkeit schwankt dann kaum noch und man erhält die statistische Wahrscheinlichkeit für z. B. eine „6“.

Dieses Verhalten der relativen Häufigkeit bei sehr großen Versuchsanzahlen wird *Gesetz der großen Zahlen* genannt.

Wenn ein Geheimtext aus sehr vielen Buchstaben besteht, dann sind etwa 17 % der Zeichen wahrscheinlich „e“s.

AB: Geheimschriften und Gesetz der grossen Zahl M-07-1-2 (6610)

Häufigkeitsverteilung der Buchstaben in der deutschen Sprache in %



Aufgabe:

- Lies die statistische Wahrscheinlichkeit für die Buchstaben n, i, r, s und t aus dem Diagramm ab!

Buchstabe	Statistische Wahrscheinlichkeit
n	
i	
r	
s	
t	

Diese Buchstaben haben sehr ähnliche Wahrscheinlichkeiten. Daher muss man beim Entschlüsseln eines Geheimtextes verschiedene Möglichkeiten ausprobieren.

6. Geheimtext entschlüsseln

Man muss versuchen, eine Liste der relativen Häufigkeiten der Zeichen des Geheimtextes erstellen. Dann kann man die häufigsten Zeichen des Geheimtextes den häufigsten Buchstaben des deutschen Alphabets zuzuordnen.

```
UMVRTA HNVFAZ JAZBDMAVFNLAV BNRT LAZVA UND IABWVFAZAV
LATANUQANRTAV
ANVA BWSRTA LATANUBXZMRTA NBD MIAZ VNRTD BATZ BNRTAZ
FMTAZ JAZKAVFADA RMABMZ MGRT VGZ FNA VWZUMSAV
IGRTBDMIAV
```

- Erstelle zu dem Geheimtext eine Liste der relativen Häufigkeiten der Geheimzeichen.
- Ersetze dann das häufigste Zeichen durch „e“.
- Probiere jetzt verschiedene Möglichkeiten für das zweithäufigste Zeichen aus.
- Merve hat folgendes Zwischenergebnis:

```
**n**e *in*e* *e****en*i*en *i** *e*ne *i* *e**n*e*en
*e*ei**ei**en
eine *****e *e*ei*******e i** **e* ni*** *e** *i**e*
***e* *e**en*e*e **e*** **** n** *ie n*****en
********en
```

  Wie ist sie darauf gekommen? Was hat sie gemacht?
- Die fett herausgehobene Stelle könnte dir beim Entschlüsseln weiterhelfen. Welches Wort könnte dort stehen?

6.4 Literaturliste und -hinweise

Der Mathematiklehrer-Verbund MUED hat eine Reihe von Handreichungen für einen handlungs- und anwendungsorientierten Stochastikunterricht herausgegeben. Stöbern auf http://www.mued.de/ lohnt sich. Eine interessante Zusammenstellung von unterrichtsrelevanter Stochastik-Literatur durch das Max-Planck-Institut findet sich hier: http://www-abc.mpib-berlin.mpg.de/users/wassner/lit.html .

In den Büchern von Beck-Bornholdt und Dubben sind aktuelle Themen auf wenigen (3 bis 8) Seiten in auch für Schüler verständlicher Weise dargestellt. Themen sind beispielsweise Rechtsstreit nach plötzlichem Kindstod, Vaterschaftstests, DNA-Fingerprints und vieles mehr. Eine Leseprobe ist unter http://www.rowohlt.de/fm/131/Beck-Bornholdt_Hund.pdf verfügbar.

Büchter, Andreas (2009). „Kompetenter Umgang mit Daten – auch in zentralen Prüfungen?“ In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 51.26, S. 31–35.

Dubben, Hans-Hermann und Hans-Peter Beck-Bornholdt (2003). *Der Schein der Weisen. Irrtümer und Fehlurteile im täglichen Denken*. rororo.

Dubben, Hans-Hermann und Hans-Peter Beck-Bornholdt (2005). *Mit an Wahrscheinlichkeit grenzender Sicherheit. Logisches Denken und Zufall*. rororo.

Dubben, Hans-Hermann und Hans-Peter Beck-Bornholdt (2006). *Der Hund, der Eier legt. Erkennen von Fehlinformation durch Querdenken*. rororo.

Gigerenzer, Gerd (2002). *Das Einmaleins der Skepsis. Über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken*. Das spannende Wissenschaftsbuch des Jahres 2002 u. a. zum Thema Mammografie-Screening enthält ein flammendes Plädoyer für den Stochastikunterricht. Berlin-Verlag.

Abbildungsverzeichnis