Mathematische Kompetenzförderung mit Blick auf ein WiMINT-Studium

Förderung leistungsstarker Lernender im Mathematikunterricht

Michael Rüsing, Ellen Voigt, Holger Reeker

„Wie gut bereite ich meine Schülerinnen und Schüler auf ein Studium vor? Beherrschen sie das mathematische Grundwissen für eine erfolgreiche Bewältigung der Studiengänge der Wirtschafts- und Naturwissenschaften, der Informatik und der Mathematik (WiMINT)?" Das fragen sich viele Lehrerinnen und Lehrer, die in der Sekundarstufe II einen Mathematikkurs unterrichten, viele fragen sich das auch in den Klassenstufen 8 und 9, in denen thematisch wichtige mathematische Grundlagen zu Gleichungen und Funktionen gelegt werden.

Wie kann eine Differenzierung im Mathematikunterricht (MU) gelingen, die vom gemeinsamen Lerngegenstand ausgeht und wieder in den Unterricht zurückführt? Wie können interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler *nach oben* gefördert werden und ihre Lernprodukte für alle bereichernd in den Unterricht zurückfließen? Das waren die zentralen Fragestellungen für das aktuelle SINUS-Projekt, mit denen sich elf Lehrerinnen und Lehrer auseinandergesetzt haben. Als Ergebnis sind fünf Serien von Arbeitsblättern mit Lehrerkommentaren entstanden, die exemplarisch an zentralen Inhalten des MU der Jahrgangsstufen 8 bis Q2 anknüpfen. Inhaltlich werden dabei zuerst die Kompetenzen beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen in den Blick genommen. Die im Kernlehrplan obligatorischen Funktionenklassen werden dann mit Blick auf die Voraussetzungen eines WiMINT-Studiums erweitert (Betragsfunktionen, gebrochen-rationale Funktionen, Umkehrfunktionen, periodische Funktionen). Bei allen Schüleraktivitäten wird die dynamische Geometriesoftware GeoGebra zum Erkunden, bei Darstellungswechsel und zur Visualisierung intensiv genutzt.

1 Guter Unterricht braucht auch eine Differenzierung nach oben

In jeder Klasse bzw. in jedem Kurs sind die Ausgangsvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler höchst unterschiedlich. Dies betrifft sowohl Einstellungen zum schulischen Lernen, die individuelle Erfahrungswelt, die allgemeinen und fachlichen Lernvoraussetzungen und die persönlich präferierten Zugangsweisen. Um möglichst vielen Schülerinnen und Schülern – im Idealfall allen – individuell passende Lernangebote machen zu können, muss die Lernsituation differenzierend angelegt sein (s. a. Barzel, Büchter & Leuders, 2007, insbesondere zur methodischen Variabilität).

Nach Lenzen werden unter Differenzierung „alle organisatorischen, inhaltlichen und didaktischen Vorkehrungen […] gefasst, die auf besondere Ausprägungen von Lernvoraussetzungen, Lernfähigkeiten und inhaltliche Interessen verschiedener Schülergruppen eingehen" (Lenzen, 1989). In der allgemeinen

Didaktik wurde bis in die 90er Jahre (innere) Differenzierung meist an unterschiedliche Sozialformen gekoppelt mit starker Präferenz für Gruppenarbeit (vgl. Meyer, 1987 und Bruder & Reibold, 2010). Seit Ende der 90er Jahre gibt es zahlreiche pädagogische Arbeiten und Vorschläge zum Thema Heterogenität, die insbesondere den unterschiedlichen sprachlichen und kulturellen Hintergrund der Lernenden in den Blick nehmen. Für interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler werden aktuell zwar vielfältige Möglichkeiten zur Begabtenförderung in der Schule aufgezeigt (s. a. Wambach, 2001), z. B. Arbeitsgemeinschaften, Wettbewerbe, Forschungsgruppen, aber auch Projekte und Kooperationen, die im Rahmen von Partnerschaften mit Sponsoren stattfinden. Es stellt sich aber offen die Frage, warum die Förderung von interessierten Schülerinnen und Schülern weitgehend außerhalb unserer Kernaufgabe Unterricht stattfinden soll.

Bildungsstandards und der Übergang Schule-Hochschule

Seit mehr als zehn Jahren haben sich Bildungsstandards und zentrale Prüfungen etabliert. Sie legen Standards in allen Fächern fest und werden in den Kernlehrplänen und schulinternen Lehrplänen konkretisiert. Durch diese Transparenz wird mit Blick auf den Übergang Schule-Hochschule z. B. im Fach Mathematik sehr deutlich, welche Funktionenklassen bei Abiturienten zum Standard gehören (z. B. ganzrationale Funktionen und (gemischte) Exponentialfunktion).

Im Rahmen eines vorgelagerten SINUS-Projekts wurden zu den in den Kernlehrplänen formulierten Kompetenzerwartungen illustrierende Beispielaufgaben zusammengestellt (Roß & Kaufmann, 2019). Diese Aufgabensammlung bietet Schülerinnen und Schülern mit Ausbildungs- oder Studienwunsch in mathematikaffinen Bereichen, Lehrkräften an allgemeinbildenden Schulen sowie Dozentinnen und Dozenten an Hochschulen eine Orientierung, welche Aufgaben Schülerinnen und Schüler in Nordrhein-Westfalen ohne Nutzung von technischen Hilfsmitteln am Ende der Sekundarstufe I und auch bei Aufnahme eines Studiums lösen können sollen. Das vorliegende Projekt zur Kompetenzförderung mit Blick auf ein WiMINT-Studium knüpft an die Aufgabensammlung an, da im Mittelpunkt die Entwicklung von Unterrichtsmaterialien zu Themenbereichen steht, die für den Übergang Schule-Hochschule hilfreich sind. Dazu gehören beispielsweise der Umgang mit Ungleichungen, Betragsfunktionen, gebrochen-rationale Funktionen sowie periodische Funktionen.

Differenzierung nach oben im Mathematikunterricht

Im Rahmen der inneren Differenzierung im Unterricht wird traditionell (nach Heymann, 1991) zwischen offener und geschlossener Differenzierung unterschieden. Geschlossene Differenzierung beinhaltet vor allem das Zuweisen von Aufgaben mit variierendem Anforderungsniveau an Einzelne, wobei die Lernwege tendenziell eher vorgegeben sind. Favorisiert wird dabei die eigenverantwortliche Auswahl der Aufgaben durch die Lernenden – begleitet durch die Lehrenden. Offene Differenzierung dagegen bezeichnet Lernumgebungen, in denen die Schülerinnen und Schüler ihre eigenen Lernwege finden können. Das gilt für offene Aufgaben, für materialbasiertes freies Arbeiten, für die Nutzung von Lerntagebüchern oder Forscherheften etc.

In ihrem Leitartikel (Bruder & Reibold, 2010) entwickeln Regina Bruder und Julia Reibold ein alltagstaugliches Konzept zur Binnendifferenzierung und formulieren Strategien zwischen geschlossener und offener Differenzierung:

- Aufgaben mit unterschiedlichem Niveau wählen lassen,
- offene, selbstdifferenzierende Aufträge stellen,
- vielfältige Gestaltung der Lernmaterialien,
- Organisations- und Sozialformen des Lernens abwechseln.

Eine vom SINUS-Projekt intendierte innere Differenzierung nach oben greift alle genannten Strategien auf: Die entwickelten Aufgaben und Arbeitsblätter stellen erweiterte Lernangebote mit aufsteigendem Schwierigkeitsgrad dar. Eine gewisse Fähigkeit zur Selbsteinschätzung ist hierbei allerdings von den Schülerinnen und Schülern erforderlich, ggf. steuert die Lehrkraft nach und berät die jeweiligen Schülerinnen und Schüler. Bei den Arbeitsblatt-Serien wurde darauf geachtet, dass nach einigen einführenden Aufgaben auch offene Aufgaben mit freien, selbstdifferenzierenden Anteilen integriert wurden. Dies kann insbesondere beim Einsatz von GeoGebra hinsichtlich unterschiedlich komplexer Bearbeitung erreicht werden. Nach einer angemessenen Bearbeitungszeit im Unterricht ist jedoch durch Rückkopplung der Ergebnisse und Erkenntnisse in den Plenumsunterricht darauf zu achten, dass nicht einzelne Teile der Lerngruppe dauerhaft unabhängig voneinander arbeiten.

Vor dem Hintergrund der jeweiligen Lerngruppe und den individuellen Lernvoraussetzungen entscheidet die Lehrkraft, ob die Schülermaterialien in der vorliegenden Form eingesetzt werden oder als WORD-Datei heruntergeladen und bearbeitet werden. Auch Organisations- und Sozialformen des Lernens sind auf die Lerngruppen anzupassen – so kann einerseits eine Einzel- oder Partnerarbeit mit anschließendem Vortrag im Plenum geeignet erscheinen, in einer anderen Lerngruppe möglicherweise ein Gruppenpuzzle oder eine Gruppenarbeit mit anschließendem Museumsgang. Als Produkte wurden neben den Schülermaterialien auch Handreichungen für die Lehrkräfte erstellt, in denen ausgehend von der Situation des Unterrichts aufgezeigt wird, wie die Ergänzungen und Vertiefungen eingesetzt und welche Ziele damit verfolgt werden können.

Die Arbeitsblätter sind so konzipiert, dass der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben jedes Arbeitsblattes gestaffelt ist, sodass möglichst alle Schülerinnen und Schüler einer Lerngruppe mindestens zur Lösung der Einstiegsaufgaben einen Zugang finden können. Die Arbeitsblätter bieten somit eine Spannbreite, die eine Differenzierung innerhalb der Lerngruppe ermöglicht. Für die Unterstützung der Lehrkräfte wurden zu allen Arbeits- und Aufgabenblättern didaktische und methodische Kommentare erstellt. Diese enthalten in jeweils drei Abschnitten Kommentare zu den Intentionen der Aufgaben, Musterlösungen der Aufgaben und die Bezüge zu den Kompetenzen, die zur Bearbeitung der Aufgaben nötig sind oder die bei der Bearbeitung erworben bzw. erweitert werden.

Grundlage der Arbeit waren die Kompetenzerwartungen des alten Kernlehrplans Gymnasium Sekundarstufe I (G8) Mathematik (MSW, 2007). Einige der mit diesen Vertiefungen zu erreichende Kompetenzen sind in dem aktuellen Kernlehrplan Mathematik für die Sekundarstufe I, Gymnasium (MSB, 2019) aufgenommen. Die Zuweisungen zu den Jahrgangsstufen wurden bereits an eine mögliche Sequenzierung im neunjährigen Bildungsgang vorgenommen – sie stellen eine Orientierung für eine geeignete Einsortierung dar.

2 Differenzierung in der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“

Zu diesen Themen wurden Materialien erstellt:
- Lösen von Ungleichungen als Voraussetzung für die Bearbeitung der Materialien zu weiteren Funktionenklassen (ab Jahrgangsstufe 7)
- Betragsfunktionen einschließlich Betragsgleichungen und -ungleichungen (Jahrgangsstufe 8)
- Gebrochen-rationale Funktionen einschließlich Bruchgleichungen und -ungleichungen (Jahrgangsstufe 8)
- Umkehrfunktionen (Jahrgangsstufe 9)
- Periodische Funktionen (Jahrgangsstufe 10)

Alle Materialien, auch die in diesem Artikel nicht ausführlich vorgestellten, stehen online auf den Seiten zu diesem Projekt zur Verfügung[1]. Großer Wert wird darauf gelegt, graphische Methoden in den Aufgaben anzuwenden und das Wechselspiel zwischen graphischen und algebraischen Vorgehensweisen zu thematisieren.

Bereits in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (KMK, 2004) ist speziell zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang u. a. zu entnehmen: Die Schülerinnen und Schüler
- *nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge,*
- *erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar,*
- *analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale),*
- *lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen,*
- *interpretieren lineare Gleichungssysteme graphisch [...]. (S. 11f.)*

Den deutlichen Schwerpunkt dieses Artikels bilden die Materialien zu den Gleichungen und Ungleichungen sowie zu den Betragsgleichungen und den Betragsfunktionen. Sie nutzen die Kompetenzen aus dem Bereich der linearen Funktionen (auch in den verschiedenen Darstellungen und in zahlreichen Anwendungskontexten). In Aufgaben mit wirtschaftlichen Anwendungen und linearen Funktionen für Gewinne und Verluste in Abhängigkeit von einer produzierten Größe spielt nicht nur der Schnittpunkt (als „Break-even-point“) eine wichtige Rolle, sondern auch die Bereiche, in denen der Graph der Gewinnfunktion über dem Graphen der Verlustfunktion liegt und umgekehrt. Ungleichungen bieten eine weitere Darstellung (des Vergleichs zweier Funktionen), die mit den bei Schülerinnen und Schülern vorhandenen Grundvorstellungen zu Funktionen vernetzt wird (s. a. Matthäus & Matthäus, 2012). Die Materialeinheit zu Ungleichungen ist unmittelbar mit den obligatorischen Unterrichtsinhalten verbunden, bietet Möglichkeiten der Vernetzung und stellt einen Mehrwert für die notwendigen Kenntnisse und Vorstellungen z. B. für ein angestrebtes Studium der Wirtschaftswissenschaften (und der MINT-Fächer) dar. Unter 2.3 gibt es darüber hinaus einen kurzen Einblick zum Material periodischer Funktionen.

1 www.sinus.nrw.de.

2.1 Von Gleichungen und Ungleichungen

Im aktuellen Kernlehrplan ist die Kompetenzerwartung formuliert, dass Schülerinnen und Schüler in der Lage sind „Gleichungen und Ungleichungen zur Formulierung von Bedingungen in Sachsituationen“ aufstellen zu können (Arithmetik/Algebra (6), MSB, 2019, S. 29). Da in den erstellten Materialien im Zusammenhang mit den weiteren Funktionenklassen teilweise mit Ungleichungen operiert wird, sollten die entsprechenden Arbeitsblätter vorab den Schülerinnen und Schülern zur Vertiefung von Ungleichungen angeboten werden. Es ist jedoch auch möglich, sich bei den Funktionen zunächst auf das Lösen von Gleichungen zu beschränken und die Aufgabenblätter zu Ungleichungen zu einem späteren Zeitpunkt einzusetzen.

Das Material zu den Ungleichungen besteht aus insgesamt vier Arbeits- und Aufgabenblättern. Im Lehrerkommentar wird dargestellt, wie die Schülermaterialien an die Unterrichtsinhalte aus dem Kernlehrplan anknüpfen und welche Voraussetzungen die Schülerinnen und Schüler mitbringen müssen.

Da in den Aufgabenblättern immer der geometrische Aspekt bei der Lösung der Ungleichungen herangezogen wird, dient ihr Einsatz u. a. der Erweiterung der Unterrichtsinhalte zum Themenbereich der linearen Funktionen.

Die bereits erworbenen inhaltlichen Kompetenzen zu den linearen Funktionen werden trainiert und im neuen Kontext der Ungleichungen angewendet. Außerdem werden Termumformungen und Äquivalenzumformungen in einem neuen Zusammenhang eingesetzt.

Konkrete Voraussetzungen für den Einsatz der Materialien:

- Der Funktionsbegriff und die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen (Graph, Tabelle, Text, Term) müssen beherrscht werden.
- Geradengleichungen müssen bekannt sein.
- Die Bedeutung der Formvariablen in den Gleichungen (Steigung und Achsenabschnitt) muss bekannt sein.
- Die Schülerinnen und Schüler müssen mit einer Dynamischen-Geometrie-Software (DGS), z. B. GeoGebra, umgehen können, sodass sie Geraden darstellen können.
- Die DGS sollte für die Unterrichtsstunden, in denen die Aufgabenblätter eingesetzt werden, zur Verfügung stehen.
- Die Schülerinnen und Schüler können Gleichungen geometrisch und algebraisch lösen.

Lösen von Ungleichungen mit graphischen Methoden

Zu jedem Arbeitsblatt finden sich im Lehrerkommentar Erläuterungen zum unterrichtlichen Einsatz. Beispielhaft ist hier der Text zum ersten Aufgabenblatt dargestellt (Abbildung 1). Die zugehörenden Aufgaben sind in Abbildung 2 dargestellt.

Zu den Lehrerkommentaren (Abbildung 1) gehören die folgenden Punkte.

- Die erforderlichen Vorkenntnisse zur Bearbeitung der Aufgaben werden konkret genannt.
- Eine Begründung für die Abfolge der Aufgaben wird gegeben.
- Es gibt Hinweise zum Schwierigkeitsgrad der Aufgaben, sodass die Lehrkräfte sofort erkennen können, in welcher Weise die Aufgaben zur Differenzierung innerhalb der Lerngruppe beitragen.

Aufgabenblatt 1 nutzt die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler zu den Graphen linearer Funktionen, um die Lösungsmengen von linearen Ungleichungen zu visualisieren. In der ersten Aufgabe müssen sie zwei vorgegebene Geraden den ebenfalls gegebenen Gleichungen zuordnen und dann die Bereiche ablesen, in denen die Werte der einen Funktion größer sind als die der anderen. Das Ablesen solcher Bereiche ist eventuell bis zu diesem Zeitpunkt von den Schülerinnen und Schülern noch nicht in Aufgaben gefordert worden und stellt damit eine neu zu erwerbende Kompetenz dar, die aber keinen besonders großen Schwierigkeitsgrad hat. Im Grunde wird den Schülerinnen und Schülern durch die Aufgabenformulierung die anzuwendende Technik vorgeführt.

In der zweiten Aufgabe sind Ungleichungen vorgegeben. Die Schülerinnen und Schüler müssen nun die Geraden zu den Termen auf den beiden Seiten der Ungleichung zeichnen und dadurch die Ungleichung mit der in Aufgabe 1 erworbenen Technik lösen.

Aufgabe 1 kann als eine reine Übungsaufgabe zu den linearen Funktionen betrachtet werden. Sie knüpft damit direkt an die Unterrichtsinhalte an, die allen Schülerinnen und Schülern bekannt sein müssen (Aktivieren von Vorwissen und Gegenüberstellung der graphischen und symbolischen Darstellung). Aufgabe 2 sollte ebenfalls von allen Schülerinnen und Schülern gelöst werden. Mit dieser Erwartung wird das nötige Basiswissen für die folgende Differenzierung definiert (sollten Lernende auf diesem Gebiet weiterhin Schwierigkeiten haben, ist eine Differenzierung zum Thema „Ungleichungen" nicht sinnvoll).

Die Graphen können in dieser Aufgabe händisch oder auch mit der DGS erstellt werden. An dieser Stelle kann die Lehrkraft eine Vorgabe machen oder die Wahl der Methode den Schülerinnen und Schülern überlassen.

Abbildung 1: Lehrerkommentar zum Aufgabenblatt 1 für die Ungleichungen

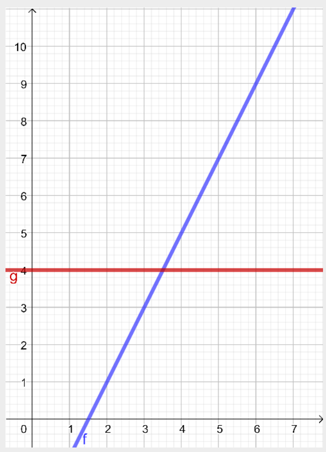
Ungleichungen Aufgabenblatt 1

Ungleichungen graphisch lösen

Aufgaben

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen mit den Gleichungen $f(x) = 2x - 3$ und $g(x) = 4$.



Markiere in der Abbildung die x-Werte, für die $f(x) > g(x)$ ist.

Was kannst du über die Lösungen der Ungleichung $2x - 3 > 4$ aussagen?

Aufgabe 2

Löse die Ungleichungen, indem du jeweils zwei Funktionsgraphen darstellst.

a) $3x + 4 > 2x - 1$ b) $2x - 2 > -x + 1$ c) $4x + 2 < 2x - 4$ d) $5x - 3 > 2x + 8$

Abbildung 2: Aufgabenblatt zur graphischen Lösung von Ungleichungen

Die algebraischen Methoden zur Lösung von Ungleichungen (Abbildung 3) werden auf zwei Arbeitsblättern vermittelt und eingeübt. Im ersten Arbeitsblatt ist darauf geachtet worden, dass bei den Äquivalenzumformungen keine Multiplikation mit oder Division durch negative Zahlen erforderlich wird, wenn bei den Umformungen die Terme so sortiert werden, dass die Anteile mit der Variablen auf der linken Seite und die absoluten Werte auf der rechten Seite der Ungleichung stehen.

In der konkreten Unterrichtssituation kann es allerdings passieren, dass die Schülerinnen und Schüler andere Lösungswege bestreiten oder z. T. auch fehlerhafte Wege gehen (z. B. auch durch Vertauschen der formalen Zeichen „>“ oder „<“). Als Intervention können einerseits leichte Fehler direkt behoben werden oder auch grundsätzliche Fehler im Rahmen eines produktiven Unterrichtsgesprächs thematisiert werden.

Zunächst wird an einem Beispiel vorgeführt, wie Ungleichungen durch Äquivalenzumformungen gelöst werden können. Anschließend folgen Aufgaben, an denen die erworbene Kompetenz eingeübt werden soll. Diese Aufgaben sind hier nicht dargestellt. Da in diesem Aufgabenblatt noch nicht über die Kenntnisse, die die Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Gleichungen erworben haben, hinausgegangen wird, handelt es sich um eine Anwendung bekannter Inhalte im neuen Kontext der Ungleichungen.

Methodisch ist es jedoch im Sinne des Bruner‘schen Spiralprinzips wichtig, zum Einstieg das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zu aktivieren. Darüber hinaus erlaubt eine numerische Erkundung die Vernetzung der symbolischen und graphischen Darstellung. Die Schaffung des Problembewusstseins für die Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen (Abbildung 4) ist abstrakter und erfolgt daher im Anschluss.

Ungleichungen Aufgabenblatt 2

Ungleichungen durch Äquivalenzumformungen lösen

Ungleichungen können wie Gleichungen durch Äquivalenzumformungen gelöst werden.

Beispiel: *Löse die Ungleichung* $4x + 3 < 2x - 2$.

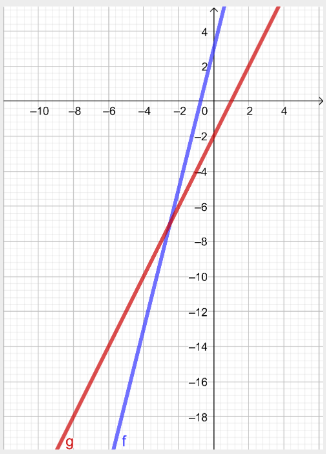
Die Ungleichung wird so umgeformt, dass alle Ausdrücke mit x auf der linken Seite und alle Ausdrücke ohne x auf der rechten Seite stehen:

$$\begin{aligned} & 4x + 3 < 2x - 2 && \mid -2x \\ \Leftrightarrow\ & 2x + 3 < -2 && \mid -3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x < -5 && \mid :2 \\ \Leftrightarrow\ & x < -\frac{5}{2} && \end{aligned}$$

Alle Zahlen x, die kleiner als $-\frac{5}{2}$ sind, erfüllen die Ungleichung.

Mithilfe von Funktionsgraphen kann man eine Probe machen.

Zeichne die Geraden mit den Gleichungen $y = 4x + 3$ und $y = 2x - 2$. Man erkennt, dass für $x < -\frac{5}{2}$ die rote Gerade über der blauen liegt.



Von den Gleichungen her bist du es gewohnt, eine Probe durch Einsetzen von Zahlen zu machen. Da die Ungleichung unendlich viele Lösungen hat, kann man durch Einsetzen einiger Werte nur Stichproben machen:

-4 ist kleiner als $-\frac{5}{2}$: $4 \cdot (-4) + 3 = -16 + 3 = -13$

$2 \cdot (-4) - 2 = -8 - 2 = -10$

Da $-13 < -10$ ist, ist -4 eine Lösung der Ungleichung.

Abbildung 3: Vorgeführtes Lösen einer Ungleichung mit algebraischen Methoden

Das zweite Arbeitsblatt zu den Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen (Aufgabenblatt 3 der Sequenz) nimmt die Probleme bei Multiplikation mit und Division durch negative Zahlen in den Blick. Wiederum beginnt das Blatt mit einem Informationsabschnitt, bevor die eigentlichen Aufgaben folgen (Abbildung 4). In diesem Informationsabschnitt wird das Problem dadurch bewusst gemacht, dass zwei Lösungsversuche vorgeführt werden, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

Bevor die Schülerinnen und Schüler selbstständig Ungleichungen lösen, bei denen sie mit dem Problem der negativen Zahlen in Berührung kommen, müssen sie zunächst die anzuwendende Regel finden und möglichst auch begründen. Weder die Regel noch die Begründung werden vorgegeben, sodass in dieser Aufgabensequenz (Abbildung 5) eigenes Erforschen gefordert ist.

Ungleichungen Aufgabenblatt 3

Probleme bei Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

Bei der Lösung von Ungleichungen durch Äquivalenzumformungen muss man manchmal sehr gut aufpassen. Die Ungleichung $-x + 3 > 5$ wurde von Anna und Bernd auf unterschiedlichen Wegen umgeformt.

Umformungen von Anna:	Umformungen von Bernd:
$-x + 3 > 5$	$-x + 3 > 5$
$3 > 5 + x$	$-x > 5 - 3$
$3 - 5 > x$	$-x > 2$
$-2 > x$	$x > -2$
$x < -2$	

Da die Ergebnisse unterschiedlich sind, muss mindestens einer von ihnen einen Fehler gemacht haben.

Abbildung 4: Schaffung eines Problembewusstseins für Schwierigkeiten bei Äquivalenzumformungen

In Aufgabe 1 (Abbildung 5) sollen die Schülerinnen und Schüler die Lösungsschritte der vorgeführten Beispiele nachvollziehen. In den Aufgaben 2 und 3 sollen sie mit unterschiedlichen Methoden entscheiden, welche der beiden Lösungen richtig ist. Die rechnerische Methode mit Einsetzen kann dabei nur die falsche Lösung herausfinden. Für die Richtigkeit der anderen Lösung gibt sie allenfalls Indizien. Die graphische Darstellung liefert auch eine Verifikation.

Die Aufgaben 1 bis 3 nutzen nur bereits erworbene Kompetenzen und sollten von nahezu allen Schülerinnen und Schülern zu bewältigen sein.

In Aufgabe 4 soll der Fehler bei der falschen Vorgehensweise gefunden werden. Dazu erstellen die Schülerinnen und Schüler zu den einzelnen Umformungsschritten in der Lösung jeweils eine Graphik. Sie werden dabei feststellen, dass nach der Division durch die negative Zahl die Lösungsmenge nicht mehr mit der in den vorhergegangenen Schritten übereinstimmt. Auch wenn in der Aufgabe die einzelnen zu zeichnenden Geraden benannt werden, ist hier doch eine größere Kreativität gefordert.

In den Aufgaben 5 und 6 wird eine Regel für die Division von Ungleichungen durch eine negative Zahl formuliert und an weiteren Beispielen die Gültigkeit der Regel überprüft. An dieser Stelle sollte durch die Lehrkraft geprüft werden, ob die Regel richtig formuliert wurde. Eventuell muss die Lehrkraft auch selber Beispiele zur Überprüfung der Regel vorgeben.

In Aufgabe 7 wird die gefundene Regel angewendet. Die Schülerinnen und Schüler werden die Erfahrung machen, dass die Division durch negative Zahlen immer vermieden werden kann, wenn die Terme mit der Variablen und die ohne Variable geeignet auf die Seiten der Ungleichung sortiert werden.

In Aufgabe 8 kann an der richtigen Lösung begründet werden, warum das Ungleichheitszeichen umgedreht werden muss. Diese Aufgabe hat ein hohes Anspruchsniveau und bleibt den leistungsstarken Schülerinnen und Schülern vorbehalten.

Aufgaben

1. *Notiere bei jedem Schritt von Anna und Bernd, welche Umformung durchgeführt worden ist.*
2. *Kontrolliere durch Stichproben, wer von den beiden wohl richtig umgeformt hat.*
3. *Stelle die Graphen der Funktionen mit den Gleichungen $f(x) = -x + 3$ und $g(x) = 5$ in einem Koordinatensystem dar. Prüfe an den Graphen, wer die richtige Lösung der Ungleichung gefunden hat.*
4. *Stelle die Graphen der Funktionen jeweils in einem Koordinatensystem dar. Sie entsprechen den Umformungsschritten von Bernd. Markiere in jedem Graphen die x-Werte, die die Ungleichung erfüllen.*
   a) $f(x) = -x + 3$ und $g(x) = 5$
   b) $f(x) = -x$ und $g(x) = 2$
   c) $f(x) = x$ und $g(x) = -2$

   An den Graphen kannst du feststellen, an welcher Stelle Bernd falsch vorgegangen ist.
5. *Formuliere eine Regel*: „Wenn man eine Ungleichung auf beiden Seiten durch eine negative Zahl dividiert, muss man …"
6. *Überprüfe deine Regel an selbst gewählten Beispielen.*
7. *Löse die Ungleichungen. Bei manchen Ungleichungen musst du die gefundene Regel beachten.*
   a) $2x + 3 > 4x - 5$ b) $3x - 6 < x + 4$ c) $x - 4 < 4x + 2$ d) $2x + 1 > 6x - 7$
   e) $-2x + 5 < 3x - 25$ f) $6x + 4 > 3x - 8$ g) $-\frac{1}{2}x + 3 > 2x - 1$ h) $\frac{3}{4}x - 1 < \frac{5}{2}x - 7$
8. Bei den Umformungen von Anna musste nicht durch eine negative Zahl dividiert werden. *Mit den Umformungen von Anna kannst du begründen, warum das Ungleichheitszeichen umgedreht werden muss, wenn man durch eine negative Zahl dividiert.*

Abbildung 5: Aufgabensequenz zur Erforschung, Anwendung und Begründung der Regel für den Umgang mit negativen Zahlen bei Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

2.2 Betragsgleichungen und Betragsfunktionen

Im Lehrerkommentar (Abbildung 6) wird zunächst der Anschluss an den Regelunterricht hergestellt, es wird benannt, welche Ziele aus dem Kernlehrplan angestrebt werden, und die weiterführenden Ziele bezüglich der neuen Inhalte werden angeführt. Wie bei allen Lehrerkommentaren werden die erforderlichen Vorkenntnisse für die gesamte Sequenz der Aufgabenblätter aufgelistet.

Der Einsatz ist möglich als Erweiterung der Unterrichtsinhalte zum Themenbereich der linearen Funktionen. Die Aufgaben dienen einerseits dazu, die inhaltlichen Kompetenzen zu den linearen Funktionen aus dem Unterricht zu trainieren und im neuen Kontext der Betragsfunktionen anzuwenden. Andererseits werden Kenntnisse über Betragsfunktionen auf unterschiedlichen Niveaustufen erworben.

Konkrete Voraussetzungen für den Einsatz der Materialien:

- Der Funktionsbegriff und die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen (Graph, Tabelle, Text, Term) müssen beherrscht werden.
- Geradengleichungen müssen bekannt sein.
- Die Bedeutung der Formvariablen in den Gleichungen (Steigung und Achsenabschnitt) muss bekannt sein.

- Die Schülerinnen und Schüler müssen mit einer DGS, z. B. GeoGebra, umgehen können, sodass sie Geraden darstellen können.
- Die DGS sollte für die Unterrichtsstunden, in denen die Aufgabenblätter eingesetzt werden, zur Verfügung stehen.

Die Schülerinnen und Schüler sollten Bilder aus Strecken zusammensetzen können. Insbesondere sollte ihnen bekannt sein, wie man den Definitionsbereich so einschränkt, dass nur ein Teil des Funktionsgraphen im Koordinatensystem dargestellt wird.

Betragsfunktionen kennenlernen

Es ist davon auszugehen, dass die Schülerinnen und Schüler den absoluten Betrag bereits im Unterricht kennengelernt, bisher jedoch keine Funktionsterme mit Beträgen behandelt haben. Deshalb müssen sie zunächst motiviert werden, einen Nutzen in der funktionalen Betrachtung zu sehen. Das geschieht, indem ihnen gezeigt wird, dass man mit diesen Funktionen Bilder mit geringerem Aufwand erstellen kann als bei Verwendung von mehreren linearen Funktionen.

Im Lehrerkommentar wird das für das Aufgabenblatt 1 genauer ausgeführt (Abbildung 6). Abbildung 7 zeigt das zugehörige Schüleraufgabenblatt.

Aufgabenblatt 1 geht von den Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler aus. Zum Start sollen sie in Aufgabe 1 ein Quadrat aus Strecken zeichnen. Dabei werden sie in der Regel auf die bekannten Funktionen zurückgreifen und vier verschiedene Terme linearer Funktionen, jeweils eingeschränkt auf einen geeigneten Bereich, verwenden. Sie nutzen hier ihre bereits im vorhergehenden Regelunterricht erworbene Kompetenz, zu einer vorgegebenen Geraden eine Funktionsgleichung zu erstellen.

Anschließend wird das Ziel des Aufgabenblattes formuliert: Mit anderen Funktionen können solche Bilder einfacher erstellt werden. Dazu wird in der zweiten Aufgabe die noch unbekannte Betragsfunktion vorgegeben. Sie wird zunächst als Black Box eingesetzt. Die neue Funktion erzeugt die untere Hälfte des Quadrates. Die Schülerinnen und Schüler beobachten und beschreiben das entstehende Bild.

Für den oberen Teil des Quadrates muss gespiegelt und verschoben werden. Da an dieser Stelle in der Regel Parabeln im Unterricht noch nicht manipuliert worden sind, müssen die Schülerinnen und Schüler experimentieren, um die passenden Modifikationen des Funktionsterms zu finden. Dazu werden sie in den nachfolgenden Aufgaben angeleitet.

In Aufgabe 3 wird genauer untersucht, welche arithmetische Eigenschaft die Betragsfunktion hat. Es ist nicht unbedingt zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler bereits unmittelbar aus dem Graphen erkennen werden, dass das Vorzeichen von negativen Argumenten positiv wird. Daher wird ihnen als Hilfestellung ein Darstellungswechsel empfohlen. Sie nutzen und erweitern dabei in einem neuen Kontext ihre Kompetenz, eine Wertetabelle zu erstellen und daraus Informationen zu gewinnen.

Abbildung 6: Lehrerkommentar zum ersten Aufgabenblatt

Durch Parametervariation wird in Aufgabe 4 der obere Teil des Quadrates erzeugt. Die Strategie des systematischen Probierens mit immer neuer Veränderung der Geradengleichung ist sinnvoll, aber auch langwierig. Günstiger ist es, die Variationen mithilfe eines Schiebereglers durchzuführen. Für den Fall, dass diese Kompetenz noch nicht erworben worden ist, ist eine Hilfe in den Aufgabentext eingebaut.

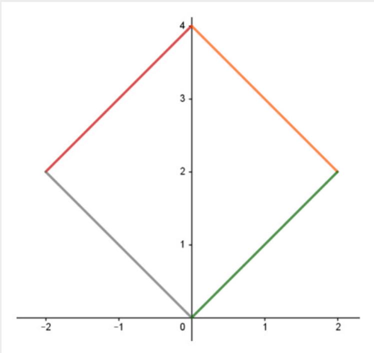
Aufgabe 1 ist eine reine Übungsaufgabe zu den linearen Funktionen. Sie knüpft damit direkt an den vorhergegangenen Unterricht an. Aufgabe 2 kann ebenfalls von allen Schülerinnen und Schülern gelöst werden, da sie nur eine Eingabe im Geometrieprogramm verlangt. Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler, die auch Lösungen zu den Aufgaben 3 und 4 erarbeitet haben, können diese anschließend für die gesamte Lerngruppe vorstellen. Besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler können formulieren, welchen Einfluss die Parametervariationen auf die Form der Graphen haben. Der Einfluss des Vorfaktors und der Einfluss des Summanden sind dabei aus der Betrachtung der linearen Funktionen bekannt und werden auf die neue Funktionsklasse übertragen.

Bilder mit Betragsfunktionen erstellen

Betragsfunktionen Aufgabenblatt 1

Bilder mit Betragsfunktionen erstellen

1. *Erstelle mit einem Geometrieprogramm dieses Bild mit einem Quadrat. Verwende dabei nicht das Vieleck-Werkzeug, sondern nutze Funktionen. Notiere, welche Funktionen du verwendet hast.*



Hier lernst du neue Funktionen kennen, sodass du das Bild einfacher erstellen kannst.

2. *Gib in der Eingabezeile ein:* f1(x)=|x|, (−2<=x<=2). *Beobachte, was auf dem Zeichenblatt dargestellt wird. Notiere die Beobachtung.*

Die hier verwendete Funktion nennt man Betragsfunktion. Sie wird mit je einem senkrechten Strich links und rechts geschrieben.

3. *Beschreibe in eigenen Worten, welche Eigenschaft die Betragsfunktion hat.*
   Tipp: Als Hilfe kannst du eine Wertetabelle erstellen.
4. *Verändere nun die Funktion* f1, *sodass der obere Teil des Quadrates dargestellt wird. Suche dazu einen geeigneten Vorfaktor vor* |x| *und einen geeigneten Summanden. Du kannst systematisch probieren oder Schieberegler verwenden.*
   Tipp: Um einen Schieberegler zu erzeugen, kannst du als die Funktionsgleichung f(x)=a*|x| eingeben. In dem Fenster, das sich dann öffnet, wählst du den Button „Erstelle Schieberegler".

Abbildung 7: Einstieg in die Untersuchung von Betragsfunktionen

Transformation von Betragsfunktionen

Es folgen zwei weitere Aufgabenblätter, in denen die Transformationen angewendet und damit eingeübt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen zwei weitere Bilder mit Betragsfunktionen erzeugen (Abbildung 8 und Abbildung 9).

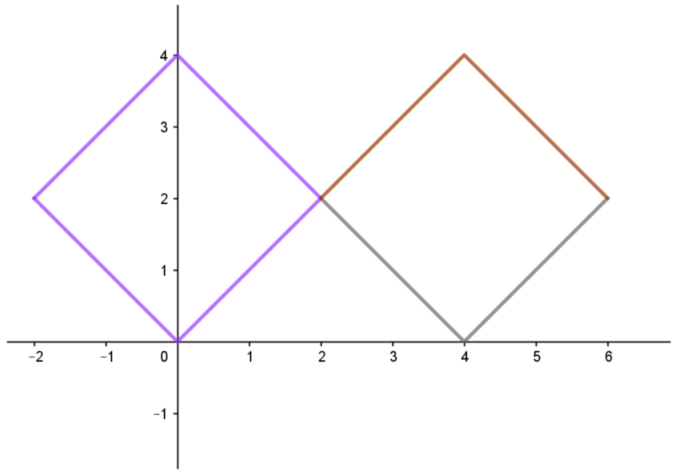


Abbildung 8: Zwei Quadrate aus Graphen von Betragsfunktionen durch Verschiebung entlang der x-Achse

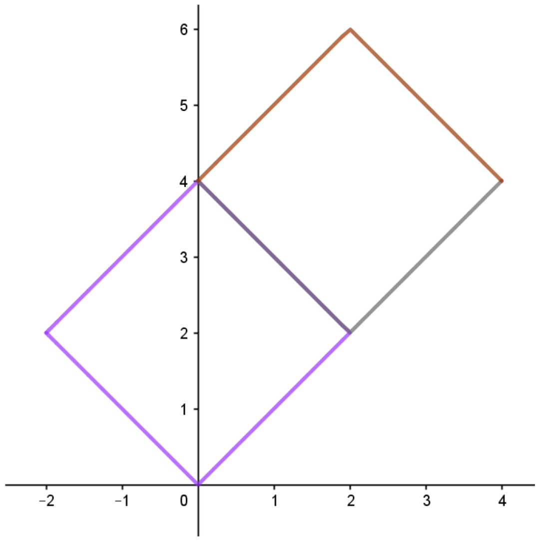


Abbildung 9: Ein Quadrat wird diagonal verschoben

Ausführlich dargestellt wird nachfolgend das Arbeitsblatt 4, das sich mit den Schnittpunkten der Graphen von Betragsfunktionen beschäftigt. Es dient als Vorbereitung auf die systematischen Untersuchungen von Betragsgleichungen, indem die Betragsfunktionen zunächst durch aneinandergesetzte lineare Funktionen dargestellt werden (Abbildung 10).

Hierbei ist zu betonen, dass die Schülerinnen und Schüler Aufgaben mit unterschiedlichem Niveau wählen können. Auch die Erkundung weist das Potenzial aus, das Quadrat in andere Richtungen zu verschieben und diese Transformation zu erfassen. In dieser Kombination wird auch die vielfältige Gestaltung der Lernmaterialien deutlich, die den Dreischritt aus Erkunden, Systematisieren und Sicherung unterstützen. In den Abbildungen 10 und 11 sind die Aufgaben und ausgewählte Lösungsvorschläge der Materialien dargestellt. Diese sind durch die folgenden Kommentare im Material für die Lehrkräfte ergänzt, wobei hier im Artikel nur der Auszug zu den beiden kreativen Aufgaben 4 und 5 dargestellt wird.

Schnittpunkte der Graphen von Betragsfunktionen

1. *Betrachte die Graphen der Funktionen* $f_1(x) = |x|$ und $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 3$. *Wie viele Schnittpunkte haben die Graphen?*
2. Die Koordinaten der Schnittpunkte kannst du bei diesem einfachen Beispiel aus der Graphik ablesen. *Versuche nun, die Koordinaten zu berechnen.*

   Tipp: Du kannst den linken und den rechten Teil des Graphen der Betragsfunktion durch lineare Funktionen beschreiben.
3. *Berechne auch die Schnittpunkte für*

   a) $f_1(x) = |x|$ und $f_3(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 3$

   b) $f_4(x) = 2 \cdot |x|$ und $f_5(x) = \frac{3}{4} \cdot x + 2$

   Kontrolliere deine Ergebnisse durch eine graphische Darstellung.
4. *Bestimme Gleichungen einer Betragsfunktion und einer linearen Funktion, sodass die Graphen nur einen Schnittpunkt bzw. gar keinen haben. Überprüfe mit der DGS.*
5. *Ist es auch möglich, mehr als zwei Schnittpunkte zu erhalten? Begründe deine Entscheidung.*

Abbildung 10: Aufgaben des Arbeitsblattes zu Schnittpunkten von Graphen der Betragsfunktion

Anspruchsvoller sind die Lösungen der Aufgaben 4 und 5: Vom Text der Aufgabe 4 her sollen zunächst Funktionsgleichungen angegeben werden, sodass die theoretische Durchdringung im Vordergrund steht. Die Graphik wird zur Überprüfung eingesetzt. Schülerinnen und Schüler können die Aufgabe auch durch systematisches Probieren auf der graphischen Ebene lösen, eine formalere Schreibweise sollte vertiefend aber initialisiert werden. In Aufgabe 5 kann die allgemeingültige Begründung nicht durch die Betrachtung von Beispielen geleistet werden. Hier ist die Argumentationskompetenz gefordert. Eine mögliche Argumentation kann in drei Schritten erfolgen:

1. Die Betragsfunktion wird in zwei lineare Funktionen aufgespalten.
2. Zwei lineare Funktionen haben höchstens einen Schnittpunkt.
3. Damit kann es höchstens zwei Schnittpunkte zwischen den Graphen einer Betragsfunktion und einer linearen Funktion geben.

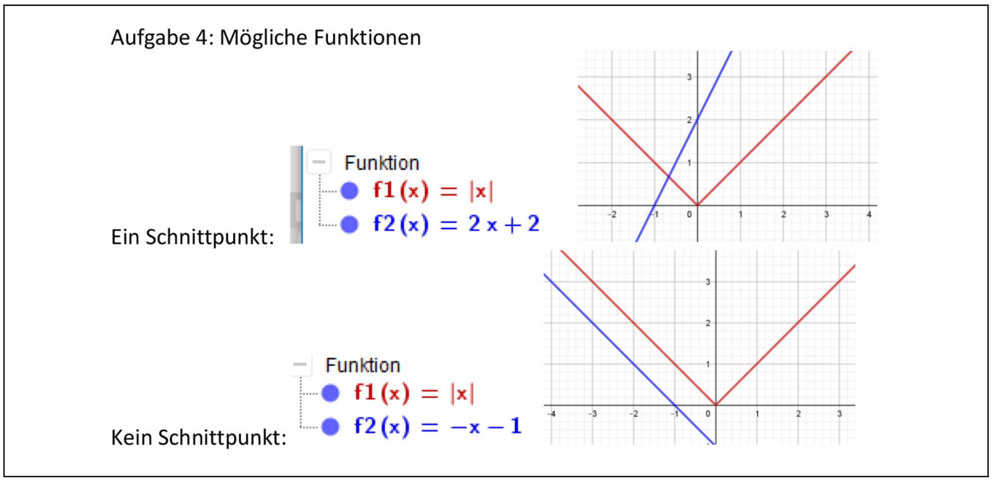


Abbildung 11: Musterlösungen zu den Aufgaben 4 und 5 für die Lehrkräfte

2.3 Periodische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind ein für die WiMINT-Studiengänge relevanter Themenbereich, der im aktuellen Kernlehrplan für Gymnasien durch verschiedene Kompetenzerwartungen abgebildet ist (MSB, 2019, S. 33 f.). Dementsprechend wurden im Rahmen des SINUS-Projekts auch zu diesem Themenbereich ebenfalls differenzierende Arbeitsmaterialien entwickelt.

Grundvorstellungen der Periodizität

Periodizität in einem etwas weiteren Sinne tritt aber auch in schulmathematischen Inhalten außerhalb trigonometrischer Funktionen auf (s. a. Frohn & Salle, 2017). Im Leitartikel „Periodische Prozesse" geben Daniel Frohn und Alexander Salle einige Beispiele: Die Folge der Endziffern von bekannten Zahlenfolgen, z. B. Folge der geraden Zahlen, Folge der Quadratzahlen, die Dezimalentwicklung periodischer Dezimalzahlen, Bandornamente und Parkette usw. Periodizität ist also ein Phänomen, für das es in vielen unterschiedlichen Themengebieten und Jahrgängen Anknüpfungspunkte gibt.

Damit Schülerinnen und Schüler über die Jahrgangsstufen hinweg ein tragfähiges Verständnis periodischer Zusammenhänge entwickeln können, bedarf es passender Grundvorstellungen, also mentaler Modelle, die mathematische Inhalte an Handlungen oder Erfahrungswissen der Lernenden knüpfen (vom Hofe & Blum, 2016). Daniel Frohn und Alexander Salle nennen zusammen mit Johanna Heitzer (Frohn & Salle, 2017) folgende Grundvorstellungen zur Periodizität:

- Teil-Ganzes-Vorstellung
- Symmetrievorstellung
- Prognosevorstellung

Einführung der periodischen Funktionen zick und zack

Im entwickelten Material geht es insbesondere darum, dass die Schülerinnen und Schüler periodische Prozesse und Muster erkennen, einen Fundamentalbereich (in dem alle Informationen enthalten sind) identifizieren und selbstständig eigene periodische Muster erzeugen.

Vertiefung mathematischer Kompetenzen durch differenzierenden Unterricht
SINUS.NRW

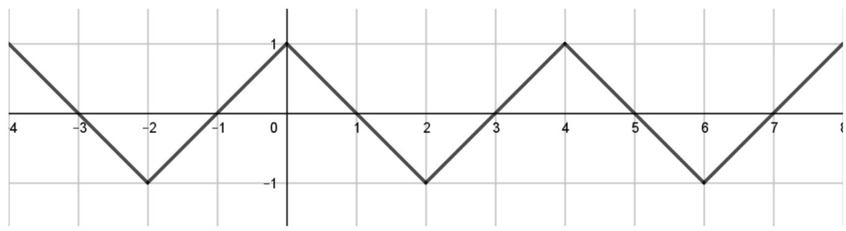
SINUS Nordrhein-Westfalen

Periodische Funktionen zick&zack Aufgabenblatt 1a

Einführung der Funktion zick

Bearbeite dieses Aufgabenblatt in Partnerarbeit: Einer hat das Blatt 1a mit dem Graphen der zick-Funktion, der andere das Blatt 1b mit dem Graphen einer anderen Funktion.

Jeder beschreibt zunächst schriftlich den Verlauf des Graphen, der auf dem eigenen Arbeitsblatt abgebildet ist. Anschließend werden die Arbeitsblätter an der Faltkante geknickt und so an den Partner weitergegeben, dass dieser den Graphen nicht sehen kann. Die Partner zeichnen nur nach der Beschreibung den Graphen in das Koordinatensystem unten auf der Seite.



Faltkante: ....

Meine Beschreibung des Graphen:

Abbildung 12: Auszug aus dem Arbeitsblatt 1a mit der Darstellung der Funktion „zick" und dem Arbeitsauftrag

Lineare Funktionen sind den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt. Über stückweise lineare Funktionen kann man die „zick-Funktion“ definieren, wie sie in Abbildung 12 dargestellt ist. Auch eine Verbindung zur Betragsfunktion ist möglich, wenn die Ausgangsfunktion unterschiedlich verschoben und gespiegelt wird. Die Lernenden erhalten also zur Einführung der „zick-Funktion“ zuerst eine Abbildung des Funktionsgraphen verbunden mit der Aufgabe, schriftlich den Verlauf des Graphen anhand des Graphen zu beschreiben. Gleichzeitig beschreibt die Mitschülerin den Verlauf der zack-Funktion (Abbildung 13), die vom Mitschüler entsprechend der Beschreibung skizziert werden sollte.

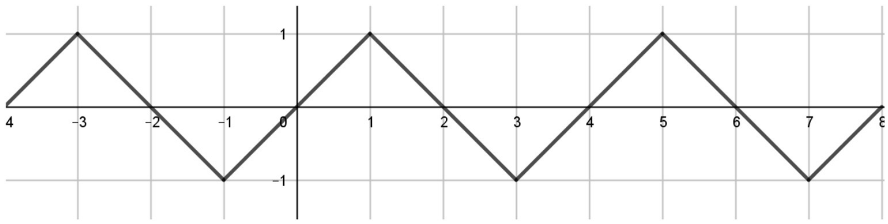


Abbildung 13: Graph der zack-Funktion

Mit periodischen Funktionen kann man rechnen
Nach dem ersten Erkunden und der Definition der zick- und zack-Funktion werden die Schülerinnen und Schüler ermutigt, mithilfe der zick- und zack-Funktion durch Addition, Subtraktion und Multiplikation interessante Funktionsgraphen und Muster zu erzeugen. Dieses Vorgehen bedient sich nach dem Konzept von Bruder und Reibold (2010) insbesondere der Strategie, offene und selbstdifferenzierende Aufgaben zu stellen.

Hierzu gibt es zuerst ein anleitendes Arbeitsblatt (Abbildung 14). Danach sollen die Schülerinnen und Schüler erkunden, dass man Funktionsgraphen nicht nur verschieben kann: In der Grundvorstellung einer Funktion als Graph soll deutlich werden, dass man mit den Funktionstermen und mit den Graphen rechnen kann: Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren.

Aufgaben:

1. Überprüft, ob der Graph der Summenfunktion $zick(x) + zack(x)$ richtig eingezeichnet wurde, indem ihr dies an den Stellen der Knickpunkte von zick und denen von zack über dem Intervall $[0, 4)$ überprüft. Begründet, dass die Überprüfung an diesen vier Stellen genügt und die dazwischenliegenden Punkte nicht mehr überprüft werden müssen.
2. Zeichnet ohne Zuhilfenahme von GeoGebra den Graphen von $f\left(x\right) = \mathrm{zick}\left(x\right) + \mathrm{zick}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Erstellt gegebenenfalls eine Tabelle mit den Punkten, die ihr dafür braucht: die Knickpunkte von $\mathrm{zick}(x)$ und die von $\mathrm{zick}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.
3. Zeigt, dass für alle Werte von x gilt:
   $\mathrm{zick}(x) + \mathrm{zick}(x-1) + \mathrm{zick}(x-2) + \mathrm{zick}(x-3) = 0.$

Abbildung 14: Ausschnitt aus dem Arbeitsblatt 4

Im Rahmen eines Unterrichtsgesprächs kann beispielsweise die Entstehung der Graphen in Abbildung 15 erläutert werden. Das Diagramm enthält die Graphen der Funktionen $\mathrm{zick}(x)$, $\mathrm{zack}(x)$ und der summierten Funktion $\mathrm{zick}(x) + \mathrm{zack}(x)$. Der Graph der summierten Funktion ist etwas dicker gezeichnet.

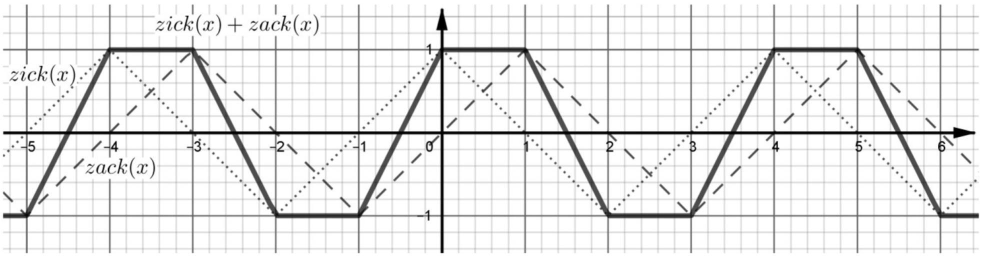


Abbildung 15: Ausschnitt aus dem Arbeitsblatt 4, dem Graphen der summierten Funktion zick(x) + zack(x)

Bei der Erkundung der Summenfunktion hat sich herausgestellt, dass die kommunikativen Kompetenzen und die Verwendung von Fachbegriffen und Fachsprache sehr bedeutsam sind. Im Rahmen des Konzepts zur Binnendifferenzierung nach Bruder und Reibold (2010) ist hier darauf zu achten, die Organisations- und Sozialformen des Lernens abzuwechseln. In der darauffolgenden offenen Phase sollte dann jede Schülerin und jeder Schüler die Möglichkeit haben, einen individuellen und interessanten Graphen durch Verknüpfung der Graphen der zick- und zack-Funktion zu erschaffen.

3 Fazit und Ausblick

In welchem Maße gelingt durch die erstellten Arbeitsmaterialien eine Differenzierung nach oben, die für alle Schülerinnen und Schüler bereichernd ist? Hierzu ist darzulegen, welche Erfahrungen die Kolleginnen und Kollegen mit den erstellten Materialien im eigenen Unterricht gemacht haben.

Wichtige Faktoren zum Gelingen

Lässt sich der unterrichtspraktische Einsatz verallgemeinern oder dominiert die persönliche Note, sodass möglicherweise der Einsatz im eigenen Unterricht mit Blick auf die bekannten Schülerinnen und Schüler besser gelingt? Der Effekt ist schwer abzuschätzen, denn in jedem Fall hängt der Erfolg des Einsatzes auch von der bisherigen Unterrichtspraxis im Kurs ab. Darüber hinaus wurden zwar methodisch-didaktische Prinzipien zur Umsetzung herangezogen, jedoch spielen auch die folgenden Faktoren in der aktuellen Unterrichtssituation eine Rolle:

- Interesse der Schülerinnen und Schüler an einer herausfordernden Aufgabe,
- Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler zur selbstständigen Erarbeitung,
- Lern- und Arbeitsverhalten der gesamten Lerngruppe.

Hinsichtlich der Persönlichkeit der Lehrkraft sind folgende Aspekte wichtig:

- Die Bereitschaft der Lehrperson, d. h. besonderes Vertrauen in die Leistungsfähigkeit und die Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler,
- Abgabe eines Teils der unterrichtlichen Kontrolle (insbesondere in die Lernprozesse),
- Abschied von der eigenen Erwartung der Lehrkraft, dass alle Schülerfragen sofort und abschließend beantwortet werden können.

Als Konsequenz ergibt sich beispielsweise ein möglicher „typischer" Einsatz im Unterricht der Klasse 8: Die Lehrkraft hat mit den Schülerinnen und Schülern das Thema der linearen Funktionen mit einigen Anwendungen erarbeitet und ermöglicht auf diesem Wege allen Lernenden die Bearbeitung einzelner bis aller Arbeitsaufträge der Arbeitsblätter zu Ungleichungen und Betragsgleichungen. Dieses Vorgehen greift insbesondere auch die Elemente der Motivationstheorie von Deci und Ryan auf (Erleben von Kompetenz, Erleben von Autonomie, Erleben von sozialer Eingebundenheit).

Einsatz des Materials für alle Schülerinnen und Schüler

In mehreren achten Klassen wurden die Arbeitsblätter zu linearen Funktionen im Unterricht eingesetzt. Dabei konnten alle Schülerinnen und Schüler an ihren Basisfertigkeiten arbeiten und auch die linearen Funktionen in GeoGebra umsetzen. Die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler konnten weitgehend selbstständig an den weiteren Arbeitsblättern arbeiten, die Aufgaben lösen und im Rahmen einer Gruppenarbeit die Ergebnisse diskutieren. Die Schülerinnen und Schüler mit größerem Unterstützungsbedarf mussten dagegen häufig zur Weiterarbeit aufgefordert werden und untersuchten vielmehr weitere Funktionen in GeoGebra. Sie konnten die weiteren Aufgaben nicht selbst lösen und auch wenig eigene Ideen hierzu entwickeln, jedoch den Lösungen der leistungsstärkeren Lernenden im Allgemeinen folgen.

Ausblick

Die Arbeitsblattserie zu den Ungleichungen und linearen Funktionen wurde auch in zwei Vertiefungskursen der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe eingesetzt. Hier wurden sehr positive Unterrichtserfahrungen gemacht, da die interessierteren Schülerinnen und Schüler sehr frei an den selbst gewählten Aufgaben arbeiten konnten. Die zu bearbeitenden Aufgaben (der Klasse 8) stellten in der Einführungsphase eine Wiederholung auf höherem Niveau dar. Die bereits bekannten Inhalte wurden vertieft und auf höherem Niveau vernetzt.

In dieser Hinsicht könnten auch die aus dem Unterricht bekannten Funktionenklassen (z. B. der ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen) mit den gebrochen-rationalen Funktionen bzw. den trigonometrischen Funktionen verknüpft werden. Dies würde zahlreiche Anwendungen aus den WiMINT-Studiengängen in den Blick nehmen und im Sinne der Mathematik interessante Beispiele für die allgemeinen Konstrukte der Differential- und Integralrechnung bereitstellen.

Literatur

Barzel, B., Büchter, A. & Leuders, T. (2007). *Mathematik-Methodik, Handbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruder, R. & Reibold, J. (2010). Weil jeder anders lernt. Ein alltagstaugliches Konzept zur Binnendifferenzierung. *Mathematik lehren, 27* (162), 2–9.

Deci, E. & Richard R. (1993). Die Selbstbestimmung der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Zeitschrift für Pädagogik, *39* (2), 223–238.

Deschauer, S., Körner, H., Meyer, J., Greefrath, G., Hoffmann, M. & Koepf, W. (2018). „Mathematik in Schule und Hochschule – wie groß ist die Lücke und wie gehen wir mit ihr um?“ *Der Mathematikunterricht, 64* (5), 55–56.

Frohn, D. & Salle, A. (2017). Periodische Prozesse. *Mathematik lehren, 34* (204), 2–4.

Geldermann, C., Padberg, F. & Sprekelmeyer, U. (2016). Rahmenbedingungen für erfolgreichen Mathematikunterricht / Angemessenheit der Arbeitsweisen und des Anspruchsniveaus. In C. Geldermann, F. Padberg & U. Sprekelmeyer, *Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe II* (S. 19 ff.). Berlin: Springer Spektrum.

Heymann, H. W. (1991). Innere Differenzierung im Mathematikunterricht. *Mathematik lehren, 8* (49), 2–9.
Lenzen, D. (Hrsg.) (1989). *Pädagogische Grundbegriffe* (Band 1). Reinbek: Rowohlt.
Leuders, T. & Prediger, S. (2016). *Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
Matthäus, H. & Matthäus, W.-G. (2012). *Mathematik für BWL-Bachelor: Übungsbuch*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
Meyer, H. (1987). *Unterrichtsmethoden I: Theorieband*. Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.
Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSB) (2019). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe I Gymnasium in Nordrhein-Westfalen*. Mathematik (Bd. 3401). Düsseldorf.
Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSW) (2007). *Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen*. Mathematik (Schule in NRW, Bd. 3401: (G8), 1. Aufl.). Düsseldorf.
Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSW) (2014). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium, Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen*. Mathematik (Schule in NRW, Bd. 4720, 1. Aufl.). Düsseldorf.
Roß, J. & Kaufmann, S. (2019). *SINUS.NRW: Mathematik ohne Hilfsmittel. Illustrierende Aufgaben zu den Kompetenzerwartungen am Ende der Sekundarstufe I* (Beiträge zur Schulentwicklung | Praxis). Münster: Waxmann.
Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10); [Beschluss vom 4.12.2003]* (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz). München: Wolters Kluwer.
Ulm, V. (2005). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe für individuelle Lernwege öffnen*. Seelze-Velber: Kallmeyer.
Ulm, V. (2010). Das ist neu, das erforsche ich! Einstiege differenzierend gestalten. *Mathematik lehren, 27* (162), 10–13.
Vollrath, H.-J. (2014). Funktionale Zusammenhänge. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik, Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II*. Seelze-Velber: Kallmeyer.
Vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). „Grundvorstellungen" as a Subject-Matter Didactics Category. *Journal für Mathematikdidaktik, 37* (1), 225–254.
Wambach, H. (2001). *Modelle der Begabtenförderung. Vielfältige Möglichkeiten zur Begabtenförderung in der Schule*. Köln: Bezirksregierung.

Projektgruppe

Dr. Christina Diehl, Münster
Dr. Thomas Giebisch, Remscheid
Gaby Heintz, Neuss
Steffen Heyroth, Essen
Matthias Lippert, Remscheid
Dr. Frederick Magata, Düsseldorf
Stefan Möllenberg, Düsseldorf
Dr. Holger Reeker, Witten
Burkhard Rüsing, Goch
Michael Rüsing, Essen
Ellen Voigt, Wuppertal

Wissenschaftliche Beratung und Unterstützung
Prof. Dr. Florian Schacht, Universität Duisburg-Essen (Didaktik der Mathematik)