Anteilsvorstellung als Grundlage der Bruchrechnung

Unterrichtsreihe mit Forscherheft für den 5. Jahrgang

Annett Veit, Katharina Jarczak, Klara Kolcov, Jeanette Fuhrmann, Johannes Gerdiken, Sebastian Kollhoff, Rudolf vom Hofe

Bruchrechnung spielt eine tragende Rolle in Alltag und Beruf. Dennoch sind gerade in diesem Themenbereich große Wissenslücken, nicht tragfähige Vorstellungen und mangelhafte Fertigkeiten im Umgang mit Bruchzahlen und in der Bruchrechnung festzustellen. Woran kann es liegen, dass die Bruchrechnung den Schülerinnen und Schülern so große Schwierigkeiten bereitet?

Ausgehend von bestehenden Ansätzen zur Einführung von Bruchzahlen wird im Rahmen dieses Artikels eine Unterrichtsreihe und deren Erprobung vorgestellt, die sich an Handlungen zur Begriffsbildung orientiert und einen fachlich-aufbauenden Unterrichtsgang abbildet. Sie greift Methoden des schnellen Feedbacks[1] auf, um die sich bei den Lernenden aufbauenden Vorstellungen zu Bruchzahlen und zu mathematischen Operationen mit Bruchzahlen zu erfassen und, wenn notwendig, nicht tragfähige Vorstellungen frühzeitig im Rahmen des Unterrichts in tragfähige Grundvorstellungen zu überführen.

Das im Projekt entwickelte Forscherheft „Eine Reise in die Welt der Brüche“ bildet den Gang der Unterrichtsreihe ab, bietet den Lernenden viele Gelegenheiten zum mündlichen Austausch und zum bewussten Wechsel der Darstellungsebene sowie auch die Möglichkeit zum selbstständigen Arbeiten. Zugleich können sie Zusammenhänge entdecken und den Überblick behalten, welche Ziele erreicht wurden und welche Schritte folgen werden.

Im Forscherheft werden alle notwendigen (normativen) Grundvorstellungen fachlich aufbauend aufgegriffen, sodass das Konzept der Bruchzahlen, das Verfeinern und Vergröbern sowie erste Rechenoperationen handelnd anschaulich und zunehmend abstrahierend angelegt werden können. Dabei bildet die sprachliche Umsetzung ebenfalls einen wesentlichen Baustein zur Begriffsbildung.

In Kooperation mit der Universität Bielefeld wurden Pre- und Posttests entwickelt und eingesetzt, um die Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler im Blick zu halten und die Unterrichtsreihe für eine weitere Umsetzung erneut zu überarbeiten.

1 Ausgangslage und grundlegende Projektüberlegungen

Bruch- und Anteilsvorstellungen sind ein zentrales Konzept für das Bildungsziel eines mathematisch mündigen Bürgers. Im Schulalltag stellen viele Lehrkräfte fest, dass die Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und der Bruchrechnung häufig nicht vollständig angelegt wurden. Diesen Eindruck stützen

1 Dies wird häufig auch als „Fast-Feedback“ bezeichnet und kann auch digitalisiert eingefordert werden, vgl. z. B. Beling (2019).

Ergebnisse von Vergleichsarbeiten im Jahrgang 8 der am Projekt beteiligten Schulen sowie die landesweiten Ergebnisse aus der Zentralen Prüfung 10 (vgl. z. B. MSW, 2013; QUA-LiS NRW, 2015).

Obwohl gerade für die Einführung der Bruchzahlen vielfältige Wege, Anregungen und Vorhaben bekannt sind, ist auffällig, dass am Ende der Schulzeit die individuellen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und zur Bruchrechnung oftmals nicht tragfähig sind. Dies ist bereits nach einer relativ kurzen Zeit, erst recht aber in den Jahrgangsstufen 9 und 10 feststellbar: Die Handlungszusammenhänge (z. B. das Schneiden von Tortenstücken) können nicht mehr in Bezug gesetzt werden zum Kalkül oder Vorstellungen zu Bruchzahlen sind gar nicht erst aufgebaut worden (vgl. Abschnitt 2: Didaktisch-konzeptionelle Grundlagen). Die mangelnde Festigung der Vorstellungen zur Bruchrechnung liegt vor allem an einem frühzeitigen Wechsel zum abstrakten kalkülhaften Rechnen bzw. an einer mangelnden Vernetzung kalkülhafter Operationen mit anschaulichen Handlungen.

Auf Grundlage dieser Beobachtungen, gestützt durch wissenschaftliche Expertise seitens der Arbeitsgruppe von Prof. Rudolf vom Hofe zusammen mit Sebastian Kollhoff (Universität Bielefeld) und Anregungen seitens der QUA-LiS, wurde im Rahmen dieses Projekts eine Unterrichtsreihe entwickelt, durchgeführt und fachwissenschaftlich begleitet. Im Rahmen der Evaluation konnte überprüft werden, ob und inwieweit die intendierten Ziele bei den Schülerinnen und Schülern erreicht wurden. Daraus wurden Änderungen an der erstellten Unterrichtsreihe abgeleitet.

Kompetenzerwartungen der Kernlehrpläne

Ausgehend von diesen Überlegungen wurden die in den Kernlehrplänen der Hauptschule (MSW, 2011), Realschule (MSJK, 2004b) und Gesamtschule für das Fach Mathematik (MSJK, 2004a) genannten Kompetenzerwartungen im Rahmen dieses Projekts fachsystematisch analysiert und darauf aufbauend eine Unterrichtsreihe entwickelt, die Wege zur Stärkung des inhaltlichen Denkens aufzeigt.[2] Durch Aufgreifen verschiedenster Aspekte zum Verstehen des Bruchzahlkonzepts (vgl. z. B. Padberg & Wartha, 2017) und durch die vielfältige Gestaltung der Lernmaterialien (Bruder & Reibold, 2010) sollen unterschiedliche Zugangsweisen, Denkstile und Problemstellungen eröffnet werden. Differenzierte Arbeitsaufträge und die Verbalisierung von Handlungsmustern bilden zudem einen wesentlichen Bestandteil des Unterrichts. Die Schülerinnen und Schüler sollen Zeit haben, sich mit den neuen Inhalten, Begriffen und Vorstellungen vertraut zu machen, das neue Denkobjekt „Bruchzahl“ mit inhaltlichen Denkweisen zu verknüpfen und es soll ein Raum geschaffen werden, in dem sie mathematische Handlungserfahrungen verinnerlichen können.

Wie bereits Prediger (2009) feststellte, gehen auch die in den Schulen der SINUS-Gruppe genutzten Lehrwerke vorschnell zu den denkentlastenden Kalkülen über. Um die fehlende Anschauung und Verbalisierung zu berücksichtigen und sich zugleich an der Fachsystematik zu orientieren, lag die Entscheidung auf der Nutzung derjenigen Inhalte und Aufgaben, die handelnde Operationen mit Rechenoperationen verknüpfen und einen Schwerpunkt auf ikonisch-anschaulichen Begründungen haben.

2 Die entsprechenden Kompetenzerwartungen des „Kernlehrplan für die Sekundarstufe I, Gymnasium in Nordrhein-Westfalen“ im Fach Mathematik (MSB, 2019) können mit den vorgestellten Materialien ebenfalls erreicht werden.

Konzept, Materialgrundlage und Zusatzmaterialien

Als eine wesentliche Konsequenz der Lehrwerkanalyse entstand das Arbeitsheft „Eine Reise in die Welt der Brüche", im Folgenden auch als „Forscherheft" bezeichnet. Dazu wurden zunächst Auszüge aus verschiedenen Lehrwerken gesichtet und deren Eignung mit Blick auf die Unterrichtsreihe kritisch geprüft. Anschließend wurden geeignete Aufgaben entwickelt und durch eigene Illustrationen, Handlungs-, Gesprächs- sowie Schreibanlässe angereichert. Für den Unterricht wurden die im Forscherheft benannten Gegenstände im Sinne eines handlungsorientierten Unterrichts mitgebracht und standen allen Lernenden zur Verfügung. Z. T. verblieben diese ebenso wie entstandene Lernplakate im Klassenraum für alle sichtbar.

Das Arbeitsheft bietet zudem leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, anspruchsvollere, vertiefende und weiterführende Aufgaben zu bearbeiten. Diese sind mit einem Bonbon-Symbol gekennzeichnet. Für zieldifferent zu unterrichtende Kinder wurde zusätzlich auf typische Materialien und ggf. weiteres handelndes Material zurückgegriffen. Diese und weitere prinzipielle Anregungen zu einem inklusiven Fachunterricht werden in diesem Artikel nicht weiter dargestellt, auch wenn sie bei der Durchführung im Unterricht ebenfalls eine wesentliche Rolle eingenommen haben.[3]

Die Vorteile eines solchen einheitlichen Arbeitshefts im unterrichtlichen Einsatz bestehen darin, dass dieses eine hohe Wertigkeit für Schülerinnen und Schüler besitzt, sich motivationssteigernd auswirkt und sie ihre Lösungen und Gedanken zeitökonomisch und einem roten Faden folgend notieren können. Für die unterrichtenden Kolleginnen und Kollegen ergibt sich insbesondere ein arbeitsökonomischer Vorteil, da nicht in Eigenarbeit Materialien aus unterschiedlichen Lehrwerken zusammengetragen werden müssen. Das Sichten der Bearbeitungen im Arbeitsheft während der Durchführung der Unterrichtsreihe ermöglicht zudem eine schnelle Diagnostik bezüglich des Wissensstands der Schülerinnen und Schüler während des Lernprozesses.

Begleitend zum Arbeitsheft wurde in Form des Mini-Whiteboards auf eine Methode zum Fast-Feedback zurückgegriffen (vgl. Hoffkamp, 2018, S. 26). Diese Mini-Whiteboards werden durch ein laminiertes weißes DIN-A4-Blatt hergestellt. Die Rückseite wurde – in Ergänzung zu Hoffkamps Mini-Whiteboard – in eine rote und eine grüne Hälfte unterteilt. Die Lernenden können auf der weißen Seite ihre Lösungen z. B. in Form von Zahlenergebnissen und Zeichnungen mit Whiteboard-Markern bzw. Folienstiften notieren und für die Lehrkraft sichtbar hochhalten. Die zweifarbige Rückseite kann im Zusammenhang mit Wahr-Falsch-Aussagen genutzt werden. Indem alle Lernenden gleichzeitig ihre Lösungen bzw. Einschätzungen zeigen, wird eine hohe Schüleraktivität erreicht. In dem anschließenden Unterrichtsgespräch erhalten die Schülerinnen und Schüler die Gelegenheit, ihre Lösungen zu präsentieren, zu diskutieren, zu begründen und zu bewerten, gekoppelt mit einem hohen Maß an kognitiver Aktivierung. Durch die direkte Rückmeldung sehen Lehrkräfte „wo die Kinder tatsächlich stehen – und […] umgekehrt [wird] den Kindern [gezeigt], dass wir als Lehrkraft auch sehen wollen, was sie schon können und was noch zu tun ist" (Hoffkamp, 2018, S. 29). Dieses Einholen von Rückmeldungen verknüpft mit verbalen Beschreibungen und fachlichen Begründungen zum

3 Anregungen dazu sind dargestellt z. B. auf den Seiten der QUA-LiS: inklusiver Fachunterricht, https://www.schulentwicklung.nrw.de/cms/inklusiver-fachunterricht/zum-fach-mathematik/index.html [28.06.2020] oder im Projekt PIK-AS: Mathe inklusive, https://pikas-mi.dzlm.de/ [28.06.2020].

Herstellungshandeln bietet durch regelmäßige Feedbackrunden (beispielsweise einmal pro Woche) der Lehrkraft auch eine diagnostische Komponente.

Entwicklung und Einsatz von Testinstrumenten

Die objektivierte Beobachtung des Lernzuwachs sollte auf die wesentlichen Bereiche fokussieren. Die Entwicklung angemessener Tests und Fragebögen ist jedoch nicht ohne entsprechenden Hintergrund möglich. Daher wurden aussagekräftige Fragebögen sowie empirisch haltbare Messinstrumente zusammen mit der Arbeitsgruppe von Prof. vom Hofe (Universität Bielefeld) passend zu der geplanten Unterrichtsreihe in Form eines Pre- und eines Posttests entwickelt. Der Pretest erfasst Vorkenntnisse und relevante Vorstellungen. Mit dem Ziel der Dokumentation der Kompetenzentwicklung der Lernenden wurde für das Ende der Unterrichtseinheit ein Posttest entwickelt und durchgeführt. Dieser enthält zum einen zum Pretest parallele Anker-Items, die mit geänderten Zahlenwerten bestimmten Items aus dem Pretest gleichen. Über die Auswertung dieser Anker-Items und den Vergleich der Ergebnisse im Pre- und Posttest können Kompetenzentwicklungen beschrieben werden. Zum anderen enthält der Posttest zusätzliche Items, die die Kompetenzerwartungen zum Ende der Unterrichtseinheit und darüber hinaus abbilden.

Die am Projekt beteiligten Schulen wurden zusätzlich teilweise von Studierenden im Rahmen ihrer Bachelorarbeit an der Universität Bielefeld begleitet. Sie führten mit ausgewählten Schülerinnen und Schülern Interviews durch, um so detaillierte Informationen über deren Vorstellungen und Lösungsstrategien zu erhalten.

2 Didaktisch-konzeptionelle Grundlagen

Grundschüler kommen mit einer individuellen Vorstellung von Brüchen in die weiterführenden Schulen, sie beziehen sich in der Regel auf Alltagsgegenstände und Zeitangaben. In der Vorstellung der Schülerinnen und Schüler muss nun die normative Grundvorstellung „Bruchzahl als Teil eines gleichmäßig unterteilten Ganzen“ als Herstellungshandlung angelegt werden (Kollhoff, 2020). Es lässt sich immer wieder feststellen, dass in den späteren Jahrgängen die individuelle Grundvorstellung mit der normativen Grundvorstellung nicht hinreichend übereinstimmt. Die tragfähigen mentalen Modelle mathematischer Inhalte, wobei mathematisches Denken und Handeln mit einer Vorstellung verbunden sind und somit diese Vorstellung im Langzeitgedächtnis gespeichert und abgerufen werden kann, sollten ausgebaut werden.

Unterrichtsideen von Hoffkamp & Kaliski (2017) zur Aufarbeitung von lückenhaften Anteilsvorstellungen in Jahrgang 7 führten zu der Überlegung, wie derartige Defizite im Anfangsunterricht der Sekundarstufe I vermieden werden können. Als ein weittragendes Konzept benennt Frau Prof. Hoffkamp den Bruchstreifen: Dieser soll so nachhaltig in den Unterricht der Einführungsphase implementiert werden, dass man auch in folgenden Jahrgängen auf ihn zurückgreifen kann. Hoffkamp wie auch Prediger & Hußmann (2014), sehen die Vorteile des Bruchstreifens darin, dass gerade schwächere Lernende eine feste Bezugsdarstellung brauchen und über eine längere Zeit mit diesem operieren und üben können. Das Zugänglich-Machen mit gleichzeitiger Erweiterbarkeit, wie z. B. beim Einführen vom Kürzen und Erweitern, um Brüche zu vergleichen und somit durch ihre selbst eingezeichnete Einteilung des Streifens zu vergröbern oder zu verfeinern, bietet eine weitreichende Darstellungsform. Die Anknüpfung des Bruchstreifens an den Zahlenstrahl und die daraus folgende Ordnung von Brüchen sowie die spätere Überführung vom Bruchstreifen zum Prozentstreifen bieten vielfältige Möglichkeiten.

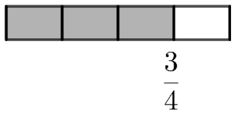

Abbildung 1: Bruchstreifen

Grundsätzlich ist es sinnvoll von der Handlung zum abstrakten, am Kalkül orientierten Rechnen zu gelangen. Der frühzeitige Übergang ohne mentale Modelle ist jedoch zu überdenken:

> Deswegen kommt es nicht nur auf die Qualität des Zugangs an, sondern auch darauf, die Vorstellungsorientierung weiter aufrecht zu erhalten, nicht statt Kalkül, aber immer wieder in Ergänzung dazu. (Prediger, 2009, S. 172)

In den Jahrgangsstufen 5 und 6 stellt diese feste Bezugsdarstellung bei der Einführung in die Bruchrechnung nur einen Aspekt zum Aufbau von der Grundvorstellung dar. Für die nachfolgenden Jahrgangsstufen müssen die Schülerinnen und Schüler aber mentale Handlungsmuster für tragfähige Grundvorstellungen der Bruchzahlen entwickeln. Die Ausprägung von individuellen, tragfähigen Grundvorstellungen hängt vom Umfang der entsprechenden Handlungserfahrungen und von der Häufigkeit ihrer Aktivierung ab.

Lernprobleme beim Umgang mit Brüchen

Der Umgang mit Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüchen stellt Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe I häufig vor eine große Herausforderung. Die Erweiterung des Zahlbereichs der natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen erfordert von den Lernenden die Anpassung einer Vielzahl von vertrauten Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen.

Der veränderte Umgang mit Zahlen führt bei vielen Lernenden dazu, dass das Auswendiglernen von Regeln und Prozeduren an die Stelle des mathematisch-inhaltlichen Verständnisaufbaus tritt. Die Nachhaltigkeit dieser auswendig gelernten Regeln ist jedoch begrenzt: Bereits nach kurzer Zeit und Beschäftigung mit anderen Inhalten können viele Lernende sich an diese Regeln nicht mehr erinnern, verwechseln sie oder wenden sie fehlerhaft an.

Die Schwierigkeiten der Lernenden im Umgang mit der Bruchrechnung sind über viele Jahre in einer Vielzahl empirischer Studien ausführlich dokumentiert. Sie lassen sich in folgenden Aspekten zusammenfassen (vgl. Wartha, 2007, S. 236 f.):

- Die Lernenden orientieren sich an Brüchen aus dem Alltag (z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$). Zu Brüchen, die in einem alltäglichen Kontext unüblich sind, werden keine Vorstellungen aufgebaut.
- Es werden falsche Rechenoperationen zur Bildung von Anteilen genutzt (z. B. Subtraktion oder Division statt Multiplikation).
- Eigenschaften der natürlichen Zahlen werden übergeneralisiert auf die Bruchzahlen übertragen. Dies betrifft insbesondere die Dichte und die Ordnung von Bruchzahlen.

- Die Lernenden versuchen das Rechnen mit Brüchen zu vermeiden und entwickeln Ausweichstrategien, die in vielen Fällen falsch sind oder den Lösungsprozess einer Aufgabe erschweren.
- Die Lernenden wenden subjektive und sachlich falsche Regeln an, um ein Ergebnis in einem plausiblen Größenbereich zu erhalten.

Diese Befunde decken sich weitgehend mit den Ergebnissen nationaler und internationaler Studien. Die Ähnlichkeit der auftretenden typischen Fehlertypen (zur Übersicht siehe Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012) zeigt auf, dass es sich hierbei um „domänenspezifische Schwierigkeitsfaktoren“ (Reinhold, 2019, S. 41) handelt, die charakteristisch für das Lerngebiet Bruchrechnung sind und unabhängig vom Alter der Lernenden und den jeweiligen curricularen Voraussetzungen auftreten können.

Dabei lassen sich eine Vielzahl von Fehlern nachweisen, die typisch für den Umgang mit Brüchen sind, z. B. komponentenweises Addieren von Zählern und Nennern bei der Addition von Bruchzahlen. Detailanalysen zeigen jedoch, dass die entscheidende Ursache für einen fehlerhaften Umgang mit Brüchen nicht in mangelnder Rechenfähigkeit, sondern in einem unzureichenden Verständnis des Bruchzahlbegriffs selbst liegt: Selbst mehrere Wochen nach der Einführung von Brüchen bezeichnen viele Schülerinnen und Schüler $\frac{3}{8}$ nicht als „Drei Achtel“, sondern als „Drei Strich Acht“, was ersichtlich macht, dass die Lernenden nach wie vor die durch einen Strich getrennten natürlichen Zahlen im Zähler und Nenner fokussieren und die Bedeutung des Bruchs als neues mathematisches Objekt noch nicht verinnerlicht haben. Mit anderen Worten: Es fehlen tragfähige Grundvorstellungen von Brüchen. Ohne diese ist der Bruch $\frac{3}{8}$ ein Zahlenausdruck, mit dem kalkuliert werden kann, dessen Sinn jedoch diffus und unklar bleibt.

Grundvorstellungen zu Brüchen

Bei der Ausbildung von Grundvorstellungen des Bruchzahlbegriffs gibt es zwei wesentliche Probleme:

- die unbewusste Übertragung von Gesetzmäßigkeiten der natürlichen Zahlen auf Brüche, was z. B. dazu führt, dass der Lernende $\frac{1}{5}$ für kleiner als $\frac{1}{8}$ hält, weil ja 5 kleiner als 8 ist,
- die unzureichende Ausbildung neuer Grundvorstellungen zu Brüchen, die den Lernenden Sinn und Bedeutung dieser neuen mathematischen Objekte verleihen.

Von den neu aufzubauenden Grundvorstellungen zu Brüchen gibt es zwei von fundamentaler Bedeutung, mit denen sich nahezu alle Anwendungskontexte von Brüchen erschließen lassen: die eher statische Vorstellung „Bruch als Anteil“ und die dynamische Vorstellung „Bruch als Operator“.

Die Grundvorstellung Bruch als Anteil stellt die Relation zwischen einem Teil und einem konkreten Ganzen her. Eine $\frac{3}{4}$ Pizza bedeutet: Eine Pizza wird in vier gleich große Teile geteilt und drei Teile davon werden betrachtet. Die Anteilsvorstellung beschreibt einen Bruch als einen Zustand, z. B. als Größe, Maßzahl, Teil eines oder mehrerer Ganzer.

Im Gegensatz dazu beschreibt die Grundvorstellung Bruch als Operator den Bruch als eine Funktion, die z. B. eine Größe „100 €“ mittels der Operation

„$\frac{3}{4}$ von“ auf die dadurch anteilsmäßig gebildete Größe „75 €“ abbildet. Auch hier kann man sich vorstellen, dass 100 € in vier gleichwertige Teile zu je 25 € geteilt werden, von denen drei Teile (75 €) betrachtet werden. Insofern sind die Grundvorstellungen „Bruch als Anteil“ und „Bruch als Operator“ verwandt. Der Unterschied liegt hingegen darin, dass die Operatorvorstellung eher die Operation „$\frac{3}{4}$ von“ betont, die Anteilsvorstellung dagegen den Zustand „$\frac{3}{4}$“, den man als Folge dieser Operation erhält.

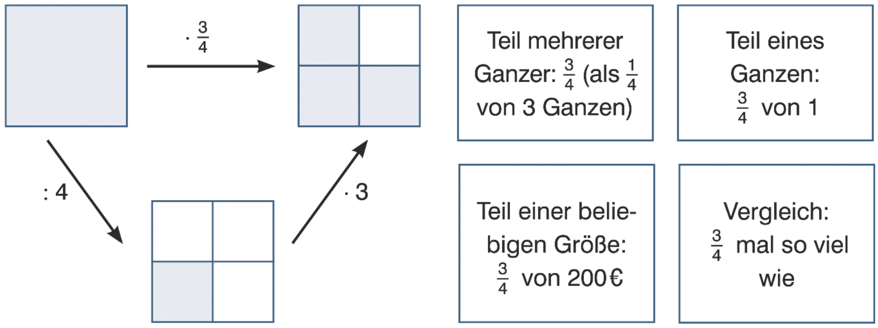

Abbildung 2: Pfeildiagramm zur Herstellung von 3/4 (links) und Grundvorstellungen für Brüche (rechts) (entnommen aus Kollhoff, 2020, S. 7)

Abbildung 2 stellt links die Operatorvorstellung dar, die die Herstellungshandlung eines Bruches beschreibt. Die rechte Seite zeigt unterschiedliche Aspekte der Anteilsvorstellung. Diese beiden Grundvorstellungen stehen im Zentrum eines verständigen Umgangs mit Brüchen. Sie ermöglichen das flexible Übersetzen zwischen Darstellungsebenen und somit zwischen symbolischen Ausdrücken und anschaulichen Darstellungen. Dies gilt nicht nur für das Übersetzen zwischen Symbolen (Zahlen, Zahlwort) und bildlich-gegenständlichen Zahlrepräsentationen, sondern auch für Übersetzungen zwischen unterschiedlichen bildlich-gegenständlichen Repräsentationen.

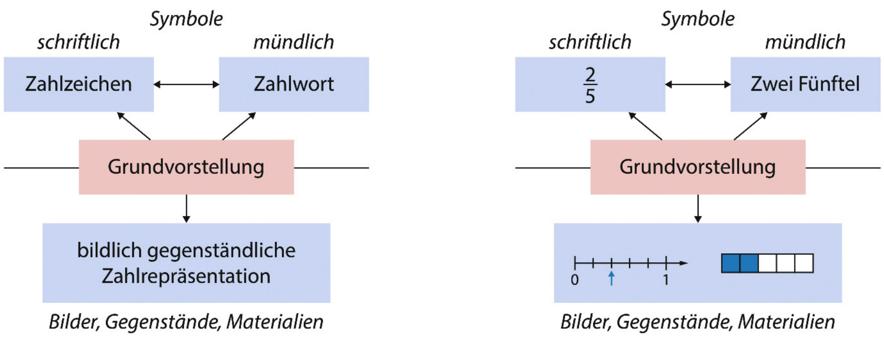

Abbildung 3: Übersetzungsbeziehungen nach Padberg & Wartha (2017, S. 1)

Padberg & Wartha (2017) veranschaulichen diese Übersetzungsbeziehungen im Einzelnen (Abbildung 3). Soll z. B. der Bruch $\frac{2}{5}$ an einem vorgegebenen Rechteck veranschaulicht werden, so sind für den Repräsentationswechsel die Grundvorstellung von $\frac{2}{5}$ als Anteil sowie die Grundvorstellung vom Bruch $\frac{2}{5}$ als Operator entsprechend der Herstellungshandlung erforderlich. Auch in der Gegenrichtung sind für die Übersetzung eines Anteils im Rechteck in eine symbolische Notation die gleichen Grundvorstellungen nötig. Insgesamt stellt der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen und Repräsentationen einen

Kernaspekt der Ausbildung von tragfähigen Grundvorstellungen von Brüchen dar.

Konsequenzen für die Umsetzung im Unterricht

In Einzelfällen mag es durchaus möglich sein, dass Lernende ein geordnetes und tragfähiges System von Grundvorstellungen ausbilden, ohne dass ihre Lehrkräfte oder sie selbst jemals bewusst darüber nachgedacht hätten. Im Allgemeinen ist die mangelnde Ausbildung von Grundvorstellungen und die Entwicklung von Fehlvorstellungen jedoch ein ernsthaftes Problem, das Defizite in der Mathematisierungs- und Modellierungsfähigkeit zur Folge hat.

Eine wichtige Voraussetzung für eine Verbesserung ist es daher, dass sich Lehrende dieser Probleme bewusst sind und im Unterricht nicht nur formale Begriffe, Techniken und Verfahren vermitteln, sondern auch die Bedeutungen, die erforderlich sind, um diese Inhalte mit Leben zu füllen und anwenden zu können. Dabei sind insbesondere folgende Unterrichtsentscheidungen wichtig:

- Die Einführung neuer Begriffe sollte mit Darstellungen und Kontexten verbunden werden, in denen die wichtigen Grundvorstellungen zum Tragen kommen; dies gilt insbesondere für die Grundvorstellungen „Bruch als Anteil“ und „Bruch als Operator“.
- Das Ausbilden von Grundvorstellungen ist keine Sache von einer Unterrichtsstunde, sondern ein längerer Prozess. Grundlage dafür ist mathematisches Handeln; hier: der handelnde Umgang mit Gegenständen und Bildern, die Brüche repräsentieren, sowie die oben genannten Übersetzungsprozesse.
- Diese Phase des Aufbaus von Grundvorstellung sollte nicht durch eine zu frühe Einführung der Rechenverfahren und ihrer Regeln überlagert werden. Letzteres sollte später erfolgen, wenn die wichtigen Vorstellungen gefestigt sind. Sinnvoll ist z. B. eine erste Unterrichtssequenz in Klasse 5, in der über vielfältige Handlungserfahrungen Grundvorstellungen aufgebaut werden, und eine Behandlung der rechnerischen Grundlagen in Klasse 6.

3 Die Unterrichtsreihe

Unter Berücksichtigung der zuvor dargestellten didaktisch-konzeptionellen Grundlagen und verschiedener unterrichtspraxisorientierter Literatur soll der nachfolgende Überblick Anregungen für die Unterrichtspraxis geben. Dies geschieht jeweils in Anlehnung an das Forscherheft.

Bei der Planung wurde zusätzlich darauf geachtet, dass der Zeitrahmen kompatibel mit den bestehenden schulinternen Curricula bleibt und nicht andere Bereiche der Mathematik vernachlässigt werden. Daher ist die dargestellte Unterrichtsreihe auf einen Zeitraum von insgesamt fünf Wochen in der Jahrgangsstufe 5 angelegt. In diesem Artikel wird ausschließlich zu den Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans für die Gesamtschule – Sekundarstufe I Bezug genommen, die Unterrichtsreihe bedient aber auch die entsprechenden Kompetenzerwartungen der Kernlehrpläne der anderen Schulformen.

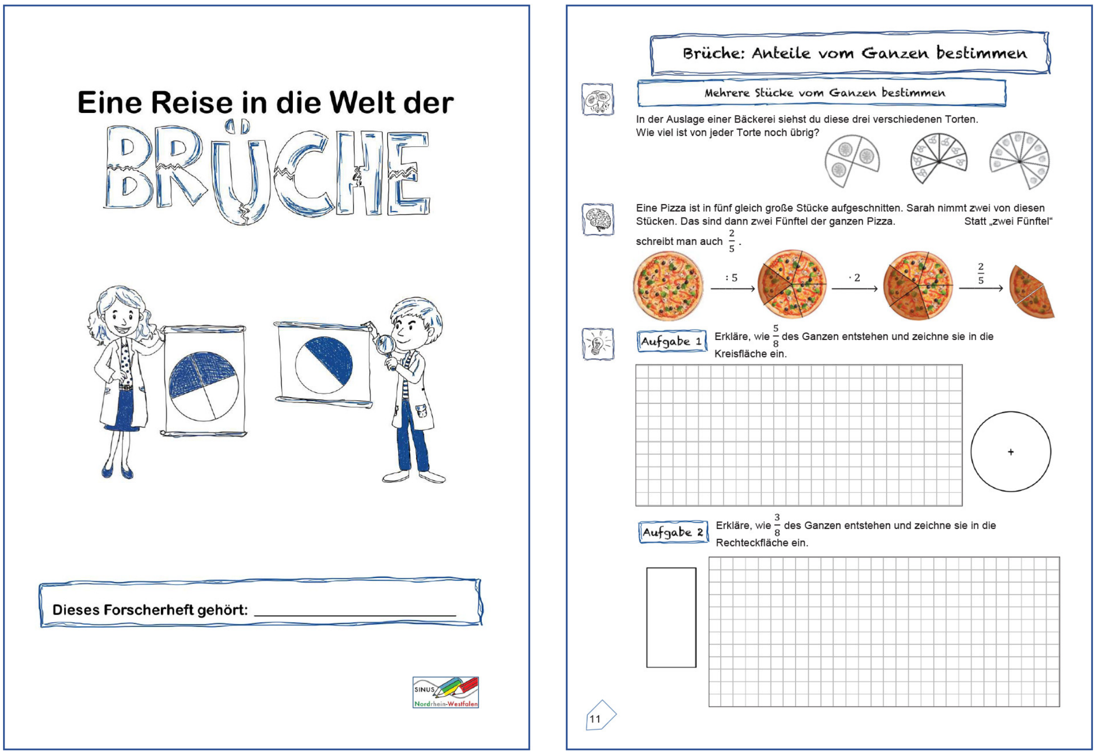

Abbildung 4: Deckblatt und ein Ausschnitt von S. 14 des Forscherhefts

Überblick über die Unterrichtsreihe

Da das Forscherheft (vgl. Abbildung 4) eng mit dem eigentlichen Unterricht und der Reihenplanung verwoben wurde, ist die Darstellung der Schwerpunkte der im Forscherheft dargestellten Aspekte in Bezug zu den Kompetenzerwartungen sinnvoller als die Darstellung einzelner Stunden.

Bestimmung von Bruchteilen – Aspekt des gerechten Teilens (FH S. 1–3)

Der Bruchbegriff wird einleitend unter dem Aspekt „Gerechtes Verteilen“ gefasst. Hierzu liegt der Fokus zunächst auf der sprachlichen Entwicklung der Bruchvorstellung als Teil eines Ganzen: Die Lernenden teilen in Alltagskontexten ein Ganzes jeweils in unterschiedlich viele, aber immer gleich große Teile auf (FH S. 1, A1, A2). Hierbei argumentieren die Schülerinnen und Schüler dahingehend mit Alltagswissen (MSJK, 2004a, S. 18)[4], dass ein gerechtes Aufteilen bei Alltagsgegenständen nur bedingt möglich ist.

Brüche als Teile eines Ganzen – Anteile über Stammbrüche (FH S. 4–10)

Nachdem der Bruchbegriff zunächst in natürlicher Sprache angelegt wurde, soll der Übersetzungsschritt in die symbolische und formale Sprache geschehen (MSJK, 2004a, S. 20)[5]. Über das praktische Falten eines DIN-A4-Blattes wird das bisherige Anteilsverständnis zunächst reaktiviert und auf rechteckige Formen eines Ganzen übertragen (FH S. 4). Im Anschluss besteht am Beispiel von Kreis und Rechteck als Darstellungsformen des Ganzen Gelegenheit, Vorstellungen des Stammbruches zu vertiefen, zwischen den Darstellungsformen zu wechseln und Beziehungsmuster der Darstellungsformen zu erkennen. Durch die Vielzahl der Aufgabenbeispiele soll die Notwendigkeit der Zahlenbe-

4 Vgl. K1 – mathematisch Argumentieren (KMK, 2004, S. 13).
5 Vgl. K5 – mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (KMK, 2004, S. 15).

reichserweiterung angelegt werden (MSJK, 2004a, S. 20)[6], bevor die mathematische Bruchschreibweise für den Stammbruch eingeführt wird (FH S. 12; symbolisch sowie mit den zugehörigen Begrifflichkeiten Bruch, Zähler, Nenner, Anteil, Ganzes). Es soll deutlich werden, dass ein Anteil sowohl von der Feinheit der Unterteilung als auch von der Größe des Ganzen abhängt. Die Anteilsvorstellung wird um die Erkenntnis erweitert, dass die Angabe eines Anteils nur sinnvoll ist, wenn man die Größe des Ganzen berücksichtigt.

Anteile von einem Ganzen bestimmen – echte Brüche (FH S. 11–18)
Verschiedene Anzahlen gleich großer Stücke eines Ganzen werden betrachtet. Dies mündet formal in den Begriff „echter Bruch". Die Rolle des Zählers und Nenners in der symbolischen Bruchschreibweise soll insbesondere durch sprachliche Erfassung weitergehend konkretisiert werden (FH S. 14).

Gleichwertige Teile – Idee des Verfeinerns und Vergröberns (FH S. 27–30)
Unter dem Aspekt des Vergröberns bzw. Verfeinerns wird das Ganze in eine gröbere bzw. feinere Unterteilung überführt. Hierbei wird anschaulich deutlich, dass die Stücke beim Vergröbern des Ganzen zwar größer werden, der Anteil jedoch gleichbleibt (ikonische Vorstellung des Kürzens) bzw. das Ganze und damit auch die Stücke gleichmäßig verfeinert werden (ikonische Vorstellung des Erweiterns).

Gleichwertige Teile am Bruchstreifen (FH S. 31–34)
Nach dem Verfeinern und Vergröbern an verschiedenen Repräsentanten geht es nun darum, sich auf den Bruchstreifen als besonders tragfähigen Repräsentanten zu konzentrieren. Hier sollte Zeit für Darstellungswechsel (ikonisch-formal-sprachlich) eingeplant werden. Der Bruchstreifen kann vielfältig in weiteren Jahrgangsstufen aufgegriffen werden, z. B. als Prozentstreifen (mit doppelter Beschriftung) und sogar dahingehend, den Übergang vom prozentualen Wachstum zur funktionalen Darstellung des kontinuierlichen Wachstums im Rahmen der Exponentialfunktion zu motivieren.

Brüche vergleichen (FH S. 35–37)
Um dem Vorgehen entgegenzuwirken, stets Gleichheit der Nenner anzustreben, sodass der Zählervergleich den Bruchvergleich ersetzt, werden Bruchzahlen und Anteile auf der ikonischen Ebene verglichen. Die Streifentafel mit unterschiedlichen Bruchstreifen gleicher Länge ermöglicht den Vergleich echter Brüche, indem man lediglich die den Bruch repräsentierende, markierte Streifenlänge in den Blick nimmt. Darüber hinaus kann der Zählervergleich gegebenenfalls ökonomischer als die Herbeiführung gleicher Nenner sein.

Verfeinern und Vergröbern: Kürzen und Erweitern (FH S. 38–42)
Durch die anschauliche, intuitive Vorstellung des Erweiterns, die aus der Idee des Vergröberns bzw. Verfeinerns entstanden ist (s. o.), kann eine klare Abgrenzung zur Multiplikation (bzw. Division) stattfinden, indem das Erweitern nicht bloß als Vervielfachung und damit als algebraische Operation bezogen auf den Zähler aufgefasst wird, sondern als Operation, die sich auf den ganzen Bruch bezieht.

6 Vgl. K4 – mathematische Darstellungen verwenden (KMK, 2004, S. 15) bzw. L1 – Leitidee Zahl (KMK, 2004, S. 10).

Aufbauend auf tragfähigen Schülervorstellungen zum Verfeinern und Vergröbern (s. o.), wird das kalkülhafte Erweitern und Kürzen klassisch als Multiplikation von Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl bzw. als Division von Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl eingeführt (möglichst erst in Jahrgangsstufe 6).

Brüche am Zahlenstrahl (FH S. 43–44)

In Anlehnung an die Einführung der Dezimalzahlen in der 6. Jahrgangsstufe erscheint thematisch die Ordnung der Brüche am Zahlenstrahl als sinnvolle inhaltliche Verknüpfung. Zu den im Arbeitsheft angebotenen Seiten zur Ordnung der Brüche am Zahlenstrahl liegen jedoch praktisch keine Unterrichtserfahrungen vor, da dieser Inhalt in den beteiligten Schulen erst in Jahrgang 6 thematisiert wird.

Ergänzend zu der Unterrichtsreihe und dem Forscherheft wurden auch verschiedene Formen der Leistungsüberprüfung in dem Projekt entwickelt. Eine Auswahl z. T. mit Analysen wird auf den Internetseiten des Projekts zum Herunterladen angeboten.

Mini-Whiteboards – Diagnose und Anregung

Um ein diagnostisches Feedback von den Schülerinnen und Schülern einzuholen und somit den Fortgang des Kompetenzerwerbs einzuschätzen, bietet sich die zuvor beschriebene Verwendung der Mini-Whiteboards an. Mit diesen können Lehrkräfte zusätzlich zu der Einsicht der Bearbeitungen im Forscherheft auch kurzfristig ein Feedback zum aktuellen Unterricht von der gesamten Lerngruppe erhalten. Die Aufforderung: „Stelle den Bruch $\frac{3}{8}$ zeichnerisch dar!“ gibt einen Einblick, ob diese Anteilsvorstellung sicher ausgebildet ist, welche Darstellung in der Lerngruppe dominiert und ob noch fehlerhafte Vorstellungen vorliegen.

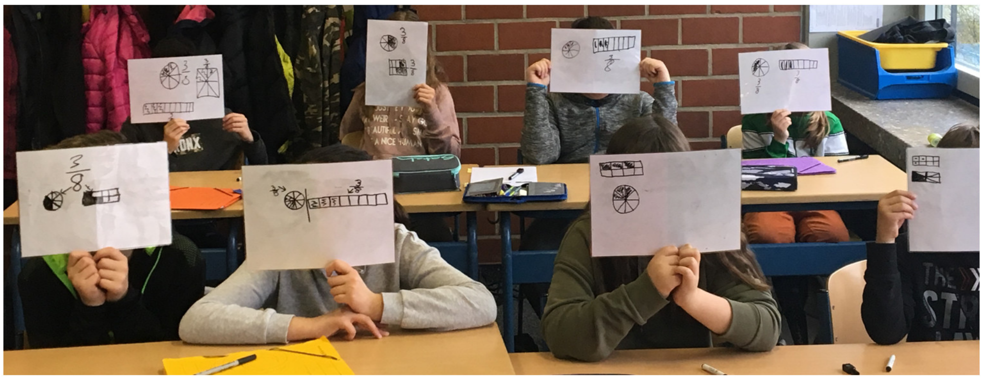

Abbildung 5: Lösungen von Lernenden mit Mini-Whiteboards zur Aufgabe: „Stelle den Anteil 3/8 zeichnerisch dar“ und der nach der Reflexion ergänzten Aufforderung, den gleichen Anteil in einer anderen Darstellung erneut abzubilden

Oftmals können Lernende lediglich eine einzige Darstellungsform abrufen und nutzen. Lässt man verschiedene Lösungsstrategien vorstellen und begründen, dann können die unterschiedlichen Strategien erfasst und deren Eignung auch reflektiert werden. Hierbei ist wichtig, dass die Herstellung der bildlichen Darstellung von Einzelnen zusätzlich verbalisiert wird: *„Das Ganze habe ich als ein Rechteck dargestellt und in acht gleich große Teile geteilt. Ein Teil entspricht einem Achtel und ich habe drei dieser Achtel markiert. Somit erhalte ich drei Achtel.“* Durch das fortlaufende Beschreiben vorgenommener Handlungen gelangen die Lernenden zu einer mentalen Verinnerlichung mathematischer Inhalte. Durch die Rückkopplung im Unterricht können sie tragfähige Grundvorstellungen erreichen, welche durch entsprechende Handlungserfahrungen und häufige Aktivierung ausgeprägt werden können. Ergänzend stellen die Schülerinnen und Schüler den gleichen Anteil erneut in einer anderen Form dar (vgl. Abbildung 5). Es wird ein tragfähiger Anteilsbegriff erreicht, indem die Lernenden neben ihrem bevorzugten Repräsentanten des Ganzen immer wieder andere mögliche Darstellungsformen ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler sehen, erläutert bekommen und deren Nutzen in verschiedenen Situationen erkennen können.

In größeren Feedbackrunden wurden wöchentlich fünf bis zehn kleinere Aufgaben nacheinander auf eine Leinwand projiziert (z. B. Abbildung 6). Die Schülerinnen und Schüler präsentieren zu jeder Aufgabe ihre Lösung mit den Mini-Whiteboards, indem sie diese vor ihre Brust halten. Die Lehrkraft erhält einen Überblick über den aktuellen Wissensstand der Lerngruppe.

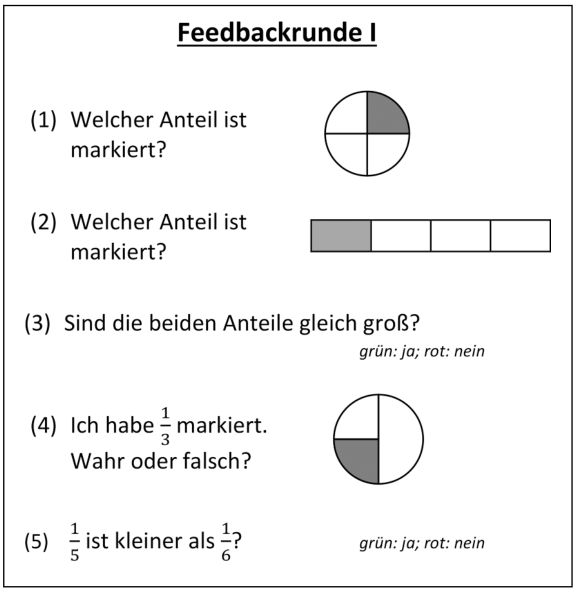

Abbildung 6: Aufgaben der 1. Feedbackrunde

Für die Aufgaben 1 und 2 aus Abbildung 6 wird die weiße Seite des Mini-Whiteboards eingesetzt. Aufgabenformate wie: „Stelle den Bruch ein Viertel bildlich dar“ und anschließender Erweiterung: „Zeichne ein Bild zu einem gleichwertigen Bruch“ bieten außerdem vielfältige Darstellungsmöglichkeiten. Die Aufgaben 3 bis 5 kann man anschließend mit der rot-grünen Seite reflektieren.

Anhand der Erfahrungen bietet das Mini-Whiteboard im Unterricht die Möglichkeit, sich schnell ein Feedback von der ganzen Lerngruppe zu holen und mit einem diagnostischen Blick den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und Leistungsprobleme einzelner Schülerinnen und Schüler zu erfassen. So kann man den Unterricht fortlaufend beurteilen und das didaktische Handeln auf diagnostische Einsichten aufbauen.

4 Evaluation des Projekts / Rückmeldungen

Während der Projektphase wurde das „Forscherheft“ an insgesamt vier Schulen in 13 Kursen mit ca. 380 Schülerinnen und Schülern erprobt. Neben den Erfahrungen der Kolleginnen und Kollegen, den Ergebnissen der Leistungsüberprüfung sowie deren diagnostischer Beurteilung und einer kleinen Umfrage unter den Schülerinnen und Schülern können quantifizierbare Ergebnisse vor allem aus den durchgeführten Tests vor und nach der Unterrichtsreihe gezogen werden.

Im Rahmen dieses Artikels werden ausgewählte Ergebnisse dargestellt. Insbesondere die Analyse von Aufgaben der Leistungsüberprüfung werden ergänzend dazu online auf den Seiten des Projekts zur Verfügung gestellt.[7]

7 www.sinus.nrw.de.

Quantitative Tests und ihre Interpretation

Zur Feststellung der Leistungsentwicklung wurden parallelisierte Pre- und Posttests entwickelt, die den Leistungszuwachs in den Inhaltsbereichen „Ablesen von Brüchen aus ikonischen Darstellungen“, „Darstellen von Brüchen“, „Berechnen von Anteilen“ und „Größenvergleich von Brüchen“ erheben.

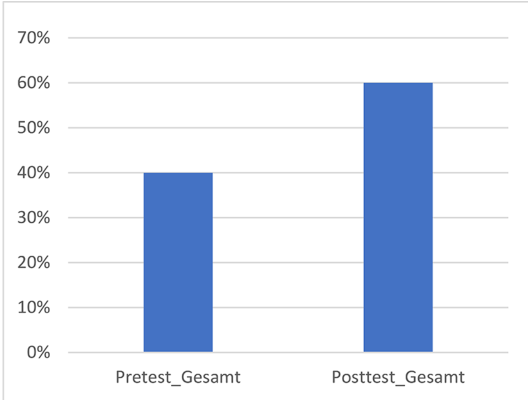

Abbildung 7: Vergleich der Leistungen im Pre- und Posttest der Gesamtgruppe

Der Vergleich der Ergebnisse des Pre- und Posttests dokumentiert einen deutlichen Kompetenzzuwachs der Schülerinnen und Schüler, der sich in der durchschnittlichen Steigerung der Testleistung von ca. 20 %-Punkten ausdrückt (siehe Abbildung 7). Dieser über alle teilnehmenden Klassen gemittelte Leistungszuwachs ist auch in den Vergleichen der Testergebnisse auf Klassenebene deutlich zu erkennen. Auf Klassenebene zeigen sich jedoch Unterschiede. Während der niedrigste durchschnittliche Leistungszuwachs in einer Klasse bei 7 %-Punkten liegt, beträgt er in einer anderen Klasse 45 %-Punkte. Diese Betrachtung ist jedoch besonders von den Leistungen im Pretest abhängig. In der Klasse mit dem geringsten Leistungszuwachs wurden im Pretest die höchsten Leistungswerte festgestellt, während die durchschnittlichen Pretest-Ergebnisse der Klasse mit dem größten Leistungszuwachs zu Beginn der Unterrichtseinheit um 25 %-Punkte niedriger lagen. Hinzu kommt, dass in der Klasse mit dem höchsten Pretest-Ergebnis die Unterrichtseinheit bereits vor der Durchführung des Tests begonnen wurde und somit in diesem Fall bereits von einem maßgeblichen Einfluss des Unterrichts auf die Testergebnisse auszugehen ist. Abbildung 8 stellt die durchschnittliche Leistungsentwicklung auf Klassenebene dar.

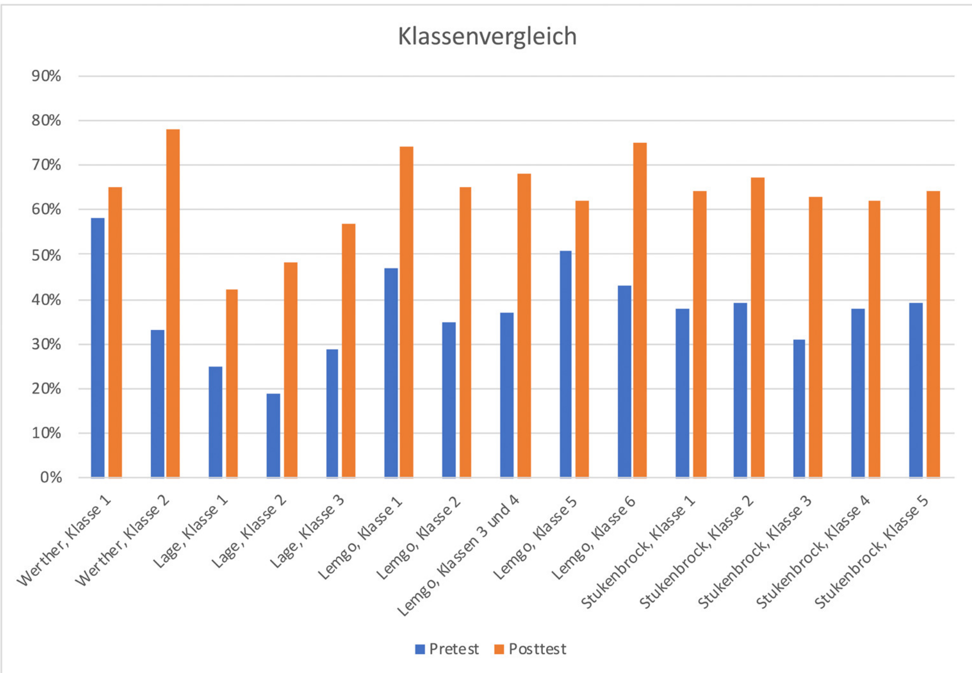

Abbildung 8: Vergleich der Leistungen im Pre- und Posttest nach Lerngruppen

Beim Vergleich der Pre- und Posttest-Ergebnisse ist auch in allen inhaltlichen Bereichen ein deutlicher Leistungszuwachs zu erkennen (vgl. Abbildung 9). Während die Lernenden im Pretest in den Bereichen „Brüche aus ikonischen Darstellungen ablesen“ und „Brüche ikonisch darstellen“ nur 27 % und 40 % erreicht haben, so liegen diese Werte am Ende der Unterrichtseinheit bei 80 % und 70 %. Die Leistungszuwächse in diesen Kernkompetenzen deuten darauf hin, dass die Lernenden insbesondere in Bezug auf die Grundvorstellung „Bruch als Anteil“ tragfähige Vorstellungen aufbauen konnten, die es ihnen ermöglichen, Brüche in verschiedenen Darstellungen korrekt zu erkennen und eigenständig in verschiedenen geometrischen Figuren abzubilden.

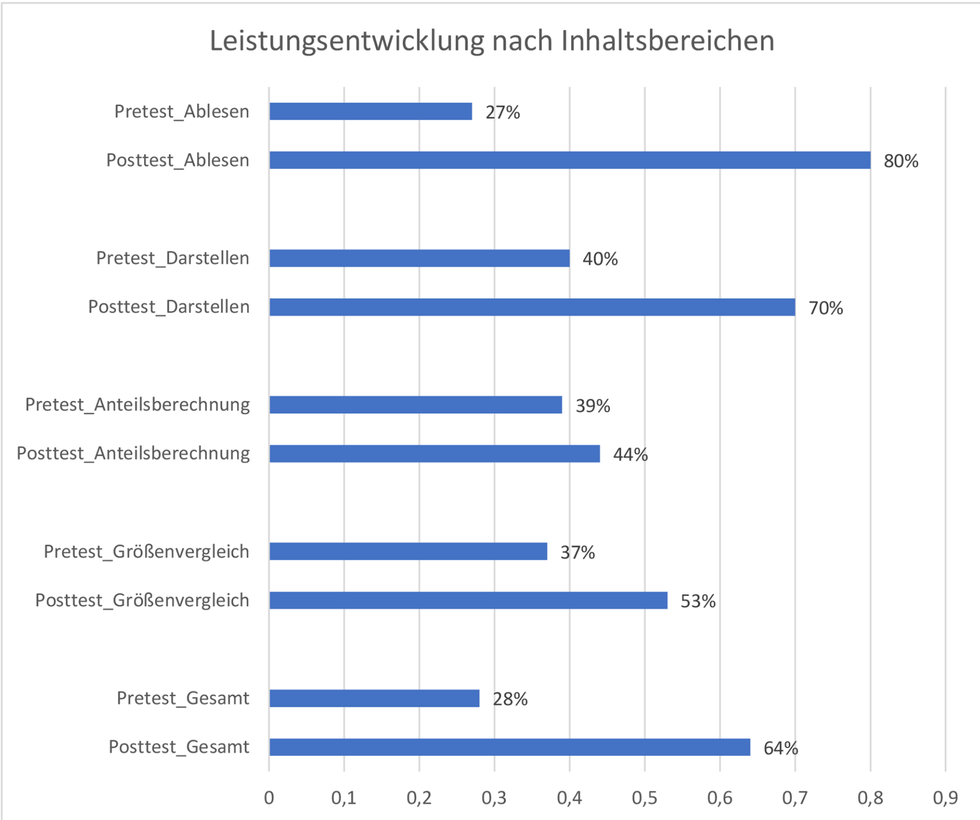

Abbildung 9: Leistungsentwicklung im Pre- und Posttest nach Inhaltsbereichen

Obwohl die Inhaltsbereiche „Anteile berechnen“ und „Größenvergleich“ (FH S. 22–26) in vielen Klassen bis zum Zeitpunkt des Posttests nicht behandelt werden konnten, sind auch in diesen Bereichen moderate Leistungszuwächse festzustellen. Insbesondere die Posttest-Ergebnisse im Bereich „Größenvergleich“ von Brüchen deuten darauf hin, dass die Lernenden auch ohne eine systematische Behandlung im Unterricht eine deutliche Leistungssteigerung erzielen konnten. Es kann angenommen werden, dass dieses Ergebnis im Zusammenhang mit der erfolgreichen Entwicklung der Anteilsvorstellung steht und die Lernenden auf Grundlage ihrer Vorstellungen von Brüchen Größenvergleiche vornehmen konnten.

Ähnliche Transfereffekte sind auch für die Ergebnisse im Bereich „Anteile berechnen“ festzustellen. Wenngleich die Leistungszuwächse in diesem Bereich geringer ausfallen, so ist auch hier zu betonen, dass das Berechnen von Anteilen in vielen Fällen nicht im Unterricht behandelt wurde.

Insgesamt zeigt sich in allen Bereichen eine positive Leistungsentwicklung, die insbesondere auf die Entwicklung tragfähiger Vorstellungen von Brüchen als Anteile zurückgeführt werden können. Auf den Webseiten zum Projekt[8] können ergänzend Schülerbeiträge zu den Pre- und Posttests sowie zu Klassenarbeiten heruntergeladen werden.

Qualitative Ergebnisse – Erfahrungen aus dem Unterricht

Der Wunsch nach der Entwicklung eines anderen Gangs durch die Bruchrechnung entstand durch die allgemein bekannten Schwierigkeiten, die es in der Schule immer wieder mit den Unterrichtsreihen zur Bruchrechnung gibt. Die Lehrkräfte stützen sich in der Unterrichtsplanung natürlich überwiegend auf die eingeführten Lehrwerke und so schreiten sie entsprechend schnell von den grundlegenden Vorstellungen zum kalkülhaften Rechnen fort. Spätestens dann, wenn in Jahrgang 6 mit der Addition und Subtraktion auf den Kenntnissen aus dem 5. Jahrgang aufgebaut werden soll, erfahren Lehrkräfte, dass der Aufbau tragfähiger Vorstellungen größtenteils nicht so erfolgreich war, wie im Unterricht intendiert. Erweitern verwechseln viele Lernende mit dem Vervielfachen, ein Halb wird leider häufig zu „1,2“, weil die Vorstellung zu dem Bruchteil nicht genügend verankert ist.

Die Fachkonferenzen der Setschulen hatten sich 2018 ausgehend von diesen Erfahrungen für die Arbeit im SINUS-Projekt ausgesprochen und diese unterstützt. Entsprechend offen und bereit waren nun die Kolleginnen und Kollegen, die in der 5. Jahrgangsstufe unterrichteten, das Forscherheft und den entsprechenden Unterrichtsgang zu erproben.

Eine Evaluation nach Beendigung der Unterrichtsreihe lieferte eine überwiegend positive Rückmeldung. So gab es hohe Zustimmungswerte zu der Eignung des Forscherhefts bzgl. der Differenzierung, der Überprüfung des erlangten Verständnisses, des langen Verharrens bei den Anteilsvorstellungen und bei der Variabilität der Aufgaben in dem Forscherheft. Die Kolleginnen und Kollegen, die das Mini-Whiteboard genutzt hatten, hielten dieses für eine hilfreiche Methode. Ebenso wurde das Schneiden von realen Repräsentanten und auch das Falten von Papier für sehr hilfreich zur Festigung der Bruchvorstellung bei den Schülerinnen und Schülern eingestuft. Dazu fanden sie in dem Forscherheft viele geeignete Aufgabenstellungen.

Die Lehrkräfte beschrieben den Umgang mit dem Forscherheft als praktisch, da es den Schülerinnen und Schülern damit leichter fällt, alles geordnet abzulegen. Auch ein Zurückblättern und die Möglichkeit der schnellen Einsichtnahme durch die Unterrichtenden wurden als arbeitserleichternd empfunden. Es sei schnell erkennbar gewesen, ob eine Aufgabenstellung oder ein Teilaspekt von den Schülerinnen und Schülern verstanden worden ist. Die Kosten für das doppelseitig gedruckte Forscherheft in DIN-A-5 sind abzuwägen, stellen aber eine lohnenswerte Investition für die Lernenden dar.

Zunächst empfanden manche Lehrkräfte die im Vergleich zum Schulbuch langsame Vorgehensweise und die detaillierte Erarbeitung als überraschend, um dann aber festzustellen, dass die vielen anschaulichen Aufgaben sehr hilfreich waren. Es wurde festgestellt, dass selbst die vermeintlich „einfachen“ Aufgaben nicht immer selbsterklärend waren und auch Erfahrungen aus dem Alltag nicht immer fehlerfrei in das Gebiet der Mathematik übertragen werden konnten. Das Forscherheft konnte von den Kolleginnen und Kollegen gut genutzt werden, um Redeanlässe zu schaffen und die Lernenden aktiv einzubinden. In diesem Zusammenhang trug das Mini-Whiteboard zur weiteren Moti-

8 www.sinus.nrw.de.

vation und einer schnellen Überprüfbarkeit von Ergebnissen bei. Ebenfalls als motivierend wurden die Bonbon-Aufgaben von den leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern gern gelöst und stolz präsentiert.

Die Kolleginnen und Kollegen stellten mithilfe des Forscherhefts erwartungsgemäß fest, dass schriftliche Begründungen und das Formulieren in ganzen Sätzen den Schülerinnen und Schülern schwerfielen. Entsprechende Aufgaben sind in den eingeführten Schulbüchern wenig vorhanden und werden bisher oft eher ausgelassen. Durch die größere Anzahl solcher Aufgaben legten die Lehrkräfte einen größeren Fokus auf diesen Aufgabentyp und erkannten im Laufe der Zeit auch einen Lernzuwachs bei ihren Schülerinnen und Schülern. Lediglich einzelne Lehrkräfte stellten den zeitlichen Umfang der Zeichen- und Erklärungsaufgaben infrage; sie wollten, wie mit dem Schulbuch gewohnt, frühzeitig zum „eigentlichen Rechnen“ kommen.

Die Lehrenden vermissen in den Schulbüchern Anlässe, um über Thesen wie „Ein Viertel kann verschieden groß sein“ (FH S. 8 Nr. 3) oder „ein Drittel kann genauso viel sein wie ein Viertel“ (FH S. 9 Nr. 3) ins Gespräch zu kommen. Diese Aussagen hatten im Unterricht zu angeregten Diskussionen geführt und waren laut der Einschätzung der Unterrichtenden für den Erkenntnisgewinn besonders wichtig.

Besonders positiv wurde das Forscherheft auch in den an der Erprobung beteiligten inklusiven Klassen aufgenommen, in denen Dank des Zusatzmaterials gut über die im Heft bereits angelegte Differenzierung hinaus gearbeitet werden konnte.

Abschließend wurde von einigen Lehrkräften angeregt, nach dem Vorbild des Forscherhefts Folgehefte zu entwickeln, um die Fortsetzung der Bruchrechnung (aber auch andere Inhalte des Kernlehrplans) entsprechend zu organisieren.

Eine Umfrage bei den Schülerinnen und Schülern ergab, dass das Forscherheft als motivierend empfunden und dass gerne damit gearbeitet wurde. Das Heft ermöglichte in einigen Bereichen das selbstständige Lernen, ohne aber gemeinsame Phasen mit dem Austausch von Lösungsideen und der Diskussion von Ergebnissen zu vernachlässigen. Dies wurde von den Schülerinnen und Schülern sehr geschätzt. Sie waren der Meinung, dass das Schneiden und Falten ihre Vorstellung von Bruchteilen geprägt und gefestigt habe. Den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben im Forscherheft empfanden die Schülerinnen und Schüler als angemessen.

5 Zusammenfassung und Perspektiven

Das Forscherheft hat eine hohe Akzeptanz bei den unterrichtenden Lehrkräften und den Lernenden. Sein Einsatz wirkt sich motivationssteigernd auf die Lernenden aus. Es entlastet die eingesetzten Lehrkräfte durch eine strukturierte Planung der Unterrichtseinheit, die leicht umsetzbar ist. Lediglich die Aufteilung der Inhalte auf ggf. zwei Jahrgänge muss von den Kolleginnen und Kollegen geplant werden – schulinterne Absprachen sind zu beachten. Die Pre- und Posttests belegen, dass mithilfe des Forscherhefts die inhaltlichen und prozessbezogenen Kompetenzen erfolgreich vermittelt wurden.

Ob jedoch die im Unterricht vermittelten Konzepte und Vorstellungen auch nachhaltig angelegt worden sind, konnte im Rahmen des Projekts nicht ermittelt werden. Dennoch ist durch die zunehmend sicheren Darstellungswechsel sowohl ikonisch als auch sprachlich durchaus davon auszugehen, dass der Prozess des Aufbaus einer langfristig tragfähigen Grundvorstellung gelungen ist. Auch die im Posttest gezeigten Transferleistungen auf noch nicht im Unterricht vermittelte Kompetenzbereiche können als Indiz dafür gesehen werden, dass das Lernen erfolgreich war.

Zusammenfassend wird also deutlich, dass die hier beschriebene Unterrichtseinheit mit einem fachlich-aufbauenden Unterrichtsgang im Vergleich zu dem in einigen Lehrwerken favorisierten Lernen am Kontext ebenfalls einen sinnvollen Weg für die Bruchrechnung darstellt. Wesentlich erscheint, dass den Lernenden ausreichend Zeit gelassen wird, die handelnd-anschauliche als auch die ikonische Ebene sowohl sprachlich als auch handelnd mit dem Kalkül zu verknüpfen, um sicher geeignete individuelle Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und der Bruchrechnung aufzubauen.

Perspektiven zur möglichen Weiterentwicklung

Ein Wiederaufgreifen der Unterrichtsreihe und des Forscherhefts in den folgenden Jahrgängen in ähnlicher Form ist wünschenswert. Ebenso wäre es sinnvoll, besonders wichtige Stellen/Stunden der Unterrichtsreihe mit der Methode des „Lesson Learning“ effektiver und nachhaltiger zu gestalten (vgl. z. B. Steffens & Posch, 2019, S. 189 ff.). Dazu ist es notwendig, einzelne Stunden oder einzelne Bereiche der Reihe zusammen mit Lehrkräften und weiteren Beobachtern genau zu analysieren, daraus Änderungen abzuleiten und in nachfolgenden Stunden erneut durchzuführen.

Falls das Forscherheft z. B. curricular bedingt nicht im 5. Jahrgang vollständig bearbeitet werden soll oder kann, bietet es sich an, dieses in der 6. Jahrgangsstufe erneut einzusetzen und an das Vorwissen nahtlos anzuknüpfen. Bis dahin nicht genutztes Differenzierungsmaterial kann gut zur Wiederauffrischung genutzt werden. Wenn im weiteren Verlauf die Bruchdarstellung mit der Dezimalzahlschreibweise verknüpft und später bei der Prozentrechnung genutzt wird, empfiehlt es sich, die Verwendung vom Bruchstreifen als wiederkehrendes und verlässliches Modell verständnisfördernd innerhalb der Fachschaft zu vereinbaren.

Zwar bietet das Forscherheft bereits an einigen Stellen Aufträge zur Versprachlichung, jedoch sind viele der zwar im Unterricht etablierten sprachlichen Elemente nicht vollständig in das Forscherheft eingebunden worden. Aus Sicht der Kolleginnen und Kollegen des SINUS-Sets bestand nicht die Notwendigkeit, diese Aufträge im Forscherheft einzubinden, da der Lernerfolg auch weiterhin maßgeblich von der gelebten Unterrichtspraxis abhängt. Die Grenzen zwischen ikonischem und kalkülhaftem Vorgehen müssen sich insbesondere in der Sprache noch deutlicher voneinander abheben. Dies könnte durch weitere konkrete Aufträge im Forscherheft bereits etabliert werden.

Literatur

Beling, B. (2019). Sehen, wo ihr steht. Mit Plickers diagnostizieren und planen. *Mathematik lehren, 36* (215), 39–42.

Bruder, R. & Reibold, J. (2010). Weil jeder anders lernt. Ein alltagstaugliches Konzept zur Binnendifferenzierung. *Mathematik lehren, 37* (162), 2–9.

Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L. & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen – Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33* (1), 29–57.

Hoffkamp, A. (2018). Den Schülerinnen und Schülern zugewandt. Feedback im Unterrichtsalltag. In W. Herget (Hrsg.), *Mathematik hat viele Gesichter. ...angewandt, „abgewandt" – und zugewandt!* (MUED Rundbriefe, Bd. 206, S. 21–29). Appelhülsen: MUED e. V. Verfügbar unter https://www.die-mueden.de/rundbrief/rb206.pdf [25.06.2020].

Hoffkamp, A. & Kaliski, J. (2017). Prozente im Wechselspiel von Vernetzung und Vereinfachung. Unterricht in heterogenen Klassen. *Mathematik lehren, 34* (200), 19–24.

Kollhoff, S. (2020). Transferschritte bei Brüchen. *Mathematik lehren, 37* (218), 7–11.

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSB) (2019). *Mathematik. Kernlehrplan für die Sekundarstufe I, Gymnasium in Nordrhein-Westfalen* (Die Schule in NRW, Bd. 3401). Düsseldorf.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSW) (2011). *Kernlehrplan und Richtlinien für die Hauptschule. Mathematik* (Die Schule in NRW, Bd. 3203, 1. Aufl.). Düsseldorf.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSW) (2013). *Analysen und Hinweise zur Bearbeitung ausgewählter Aufgaben der Zentralen Prüfungen 10 Mathematik auf der Grundlage der Ergebnisrückmeldung 2010 bis 2012. Zentrale Prüfungen 10 – Mathematik Hauptschulabschluss nach Klasse 10 / mittlerer Schulabschluss (FOR)*. Verfügbar unter https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/upload/zp10/sonstige_Dateien/2019/ZP10_Fachbericht-Mathematik.pdf [10.03.2020].

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (MSJK) (2004a). *Kernlehrplan für die Gesamtschule – Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen. Mathematik* (Die Schule in NRW, Bd. 3106, 1. Aufl.). Düsseldorf.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (MSJK) (2004b). *Kernlehrplan für die Realschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik* (Die Schule in NRW, Bd. 3302, 1. Aufl.). Düsseldorf.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, 5. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Prediger, S. (2009). Verstehen durch Vorstellen. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathe magische Momente* (S. 166–175). Berlin: Cornelsen.

Prediger, S. & Hußmann, S. (Hrsg.) (2014). *Mathe sicher können. Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Reinhold, F. (2019). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Qualitäts- und UnterstützungsAgentur – Landesinstitut für Schule des Landes Nordrhein-Westfalen (QUA-LiS NRW) (2015). *Fachdidaktische Rückmeldungen zu den zentralen Prüfungen am Ende der Klasse 10 (ZP10) im Fach Mathematik. Prüfungsjahr 2015*. Soest. Verfügbar unter https://www.schulentwicklung.nrw.de/cms/upload/Faecher_Seiten/mathematik/M15_Fachdidaktische_Rueckmeldung.pdf [17.06.2020].

Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10); [Beschluss vom 4.12.2003]* (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz). München: Wolters Kluwer.

Steffens, U. & Posch, P. (2019). *Lehrerprofessionalität und Schulqualität* (Beiträge zur Schulentwicklung, 1. Aufl.). Münster: Waxmann.

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs* (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, Bd. 54). Zugl.: Regensburg, Univ., Diss. 2007. Hildesheim: Franzbecker.

Projektgruppe

Annett Veit, Peter-August-Böckstiegel-Gesamtschule, Borgholzhausen
Katharina Jarczak, Karla-Raveh-Gesamtschule des Kreises Lippe
Klara Kolcov, Gesamtschule Schloß Holte-Stukenbrock
Jeanette Fuhrmann, Karla-Raveh-Gesamtschule des Kreises Lippe
Johannes Gerdiken, ehem. Schule an der Altenau in Borchen, Mitarbeit bis Ende 2018

Wissenschaftliche Begleitung
Sebastian Kollhoff, Universität Bielefeld
Prof. Dr. Rudolf vom Hofe, Universität Bielefeld