Michael Rüsing

MAfiSuS – Mathematische Angebote für interessierte Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler, die Interesse an einem Gebiet entwickelt haben, das über die im Schulfach vermittelten Kenntnisse und Fähigkeiten hinausgeht, suchen für sich geeignete Angebote. Im sportlichen oder musikalischen Bereich gelingt das durchweg, denn das außerschulische Angebot der Sportvereine oder Orchester und Chöre ist groß und vielfältig. Wer jedoch mathematische Interessen hat, wird außerhalb der Schule nicht viele Möglichkeiten finden. Daher ist es wünschenswert, dass Schulen über den regulären Unterricht hinaus diesen Schülerinnen und Schülern Angebote machen, beispielsweise in Form von Arbeitsgemeinschaften.

Zur Unterstützung dieses Anliegens sind im SINUS-Projekt Module vorbereitet und erprobt worden, welche die Leiterinnen und Leiter von Arbeitsgemeinschaften einsetzen können. Ein Zwischenstand wurde bereits nach der letzten SINUS-Welle publiziert (SINUS.NRW, 2013). In dieser Phase wurden die Materialien für die Jahrgangsstufen 5 und 6 erneut überarbeitet, angereichert und zudem die Materialien für die Jahrgangsstufe 7 vervollständigt.

1. Projektbeschreibung und Zielsetzung

individuelle Förderung

Alle Schülerinnen und Schüler haben ein Recht auf individuelle Förderung[1], unabhängig davon, ob sie zu den leistungsschwachen oder leistungsstarken in einem Fach gehören (Kultusministerkonferenz, 2016). Für die Förderung der leistungsstarken Schülerinnen und Schüler sind unterschiedliche Konzepte entwickelt worden. Eine Übersicht über einige Angebote, die zum Teil über den Mathematikunterricht hinausgehen, ist auf der Webseite zum Projekt zusammengefasst (www.sinus.nrw.de). Nach unserer Erfahrung werden die beschriebenen Angebote aber nicht allen an Mathematik interessierten Schülerinnen und Schülern gerecht. Auch diejenigen, die nicht zu den leistungsstärksten gehören, aber an mathematischen Fragestellungen in besonderer Weise interessiert sind, müssen gefördert werden. Die Förderung sollte regelmäßig und gut erreichbar sein sowie das Leistungsspektrum in der Gruppe abdecken. Nicht alle Fragestellungen sind im Rahmen des normalen Mathematikunterrichts angemessen zu bearbeiten. Daher bietet sich zusätzlich eine schulinterne Förderung mit Leistungsdifferenzierung in Form von Arbeitsgemeinschaften z. B. im Nachmittagsbereich an. Die Sichtung, Auswahl und Aufbereitung geeigneter Materialien ist für die Lehrkräfte jedoch mit einem großen Aufwand verbunden. Hier setzt dieses SINUS-Projekt MAfiSuS an.

Leistungsdifferenzierung

1 Vgl. §1 Schulgesetz für das Land Nordrhein-Westfalen.

Problemlöse-strategien

Ein Ziel des Projektes ist, das besondere Interesse an Mathematik und mathematikhaltigen Projekten und Aufgaben auch außerhalb der Schulmathematik zu stärken und einen flexiblen Umgang mit mathematischen Problemlösestrategien, insbesondere dem Erkennen und Nutzen von Strukturen und Mustern, zu fördern. Dazu wurden Materialien entwickelt, sodass eine zielgerichtete Förderung der interessierten Schülerinnen und Schüler mit relativ geringem Aufwand an einzelnen Schulen realisiert werden kann.

Mathematik-Olympiade

Eine wichtige Quelle für die hier vorgestellten Materialen sind die Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade, die der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. als Rechteinhaber für dieses Projekt zur Verfügung gestellt hat (Mathematik Olympiaden e.V., 2017). Diese und weitere Wettbewerbsaufgaben bieten sich als Materialgrundlage in besonderer Weise an (Mathematischer Korrespondenzzirkel Göttingen, 2008). Solche Aufgaben unterscheiden sich in der Regel von Aufgaben aus dem regulären Mathematikunterricht insofern, dass sie komplexer sind und oft nicht auf den ersten Blick erkennbar ist, welche Werkzeuge und Strategien zur Lösung führen. Somit geht es um flexiblen Einsatz der im Unterricht bereits erworbenen Methoden und Fähigkeiten, ohne dass schulrelevante neue Inhalte vorweggenommen werden müssen. Angewandt werden vielmehr unterschiedliche heuristische Strategien, sodass die Problemlösefähigkeit auf einem komplexeren Anspruchsniveau gestärkt wird. Die Strategien werden im Lehrermaterial immer wieder deutlich hervorgehoben und sollten durch die AG-Leitung auch den Teilnehmerinnen und Teilnehmern bei der Reflexion der Lösungen bewusst gemacht werden.

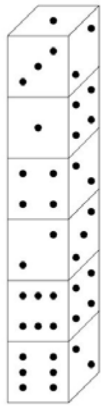
Konzept

Erstellt wurde ein Konzept für eine wöchentliche Arbeitsgemeinschaft mit einem Umfang von jeweils 90 Minuten. Zum Konzept gehören Vorschläge für eine Reihenfolge und den Zeitaufwand in den einzelnen Halbjahren, die ohne großen Aufwand an die individuellen Bedürfnisse der Lerngruppe angepasst werden können. Einen im Rahmen von Arbeitsgemeinschaften häufig zitierten Vorschlag aus dem „*Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter Schüler*“ (König, 1996, S. 16–19) aufgreifend ist jede AG-Sitzung dreigeteilt. Diese Dreiteilung dient dazu, für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer Abwechslung während einer jeden Sitzung herzustellen.

Warm-up

Knobelaufgabe

Mit einem Warm-up werden die Schülerinnen und Schüler auf mathematisches Denken und Handeln eingestimmt. Diese Phase sollte nicht mehr als 10 Minuten dauern und umfasst eine kleine Knobelaufgabe, die in der Regel losgelöst vom Inhalt des Hauptteiles gestaltet ist. Die Warm-ups sind bereits in der letzten Dokumentation ausführlich vorgestellt worden (MSW, 2013, S. 47–49). In Abbildung 1 ist ein Beispiel für ein Warm-up dargestellt.



Warm-up 62: Würfelturm

In der Abbildung sind sechs Würfel übereinander gestapelt. Einige Seiten mit Augenzahlen sind sichtbar. Wie groß ist die Summe aller nicht sichtbaren Augenzahlen?

Abbildung 1: Beispiel für ein Warm-up

Hauptteil

Für den Hauptteil mit der Bearbeitung eines mathematikhaltigen Themas ist ein Zeitrahmen von 60 Minuten vorgesehen. Das Material für den Hauptteil ist in thematische Module gegliedert. Jedes Modul ist in einer bis drei AG-Sitzungen zu bearbeiten.

thematische Module

Zentrales Material für jedes Modul ist eine Handreichung für die AG-Leitung. Diese Handreichung enthält

- eine kurze Beschreibung über die Intention, die mit dem Modul verfolgt wird,
- die Schüleraufgaben mit Lösungshinweisen sowie didaktischen und methodischen Kommentaren,
- Vorschläge für Variationen der Aufgaben zur Differenzierung innerhalb der AG,
- Ergänzungsvorschläge für besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler sowie
- Hilfeangebote in Form von Hilfekarten für Schülerinnen und Schüler, die keine Lösungsansätze finden.

Weiterhin enthalten sind

- Aufgabenblätter als Kopiervorlage sowie
- eventuell Kopiervorlagen für die Hilfematerialien.

Nach den Erfahrungen aus der praktischen Erprobung fordern die Schülerinnen und Schüler im Hauptteil mehr Abwechslung, aber auch mehr Vertiefung ein und wollen sich nicht ausschließlich mit Wettbewerbsaufgaben beschäftigen. Auf dieser Grundlage sind somit Module entwickelt worden, in denen „mathematische Basteleien“ oder besondere Projekte – auch mit Einsatz elektronischer Hilfsmittel – bearbeitet werden. In Kapitel 2.2 werden zwei solcher Module exemplarisch vorgestellt. Im Rahmen dieser Phase jeder AG-Sitzung werden die angewandten Strategien reflektiert und ggf. mit anderen Strategien verglichen.

Ausklang

mathematisch-logische Spiele

Nachdem die Schülerinnen und Schüler sich intensiv mit kognitiv herausfordernden mathematischen Aufgaben oder Projekten beschäftigt haben, ist ein spielerischer Ausklang der AG-Sitzung vorgesehen. Dabei stehen ebenfalls mathematisch-logische Spiele im Vordergrund, bei denen die Lösungen und Begründungen gemeinsam gesucht werden. Dafür sind etwa 20 Minuten vorgesehen, ggf. kann aber auch diese Phase kürzer ausfallen, wenn der Hauptteil z. B. einen intensiveren Austausch ergeben hat. Beispielhaft wird in Kapitel 2.3 eine spezielle Variante des bekannten Spiels „Mastermind" dargestellt.

Die Materialien des SINUS-Sets wurden in den Arbeitsgemeinschaften an verschiedenen Schulen erprobt und mehrfach auf Tagungen – auch außerhalb von NRW – vorgestellt. Dabei wurden immer wieder Rückmeldungen von den Kolleginnen und Kollegen zum Einsatz und zu sinnvollen Veränderungen erbeten. Eingegangene Rückmeldungen wurden bei den Set-Sitzungen diskutiert und eingearbeitet. Das vollständige Material ist auf der SINUS-Seite (SINUS NRW, 2017)[2] bereitgestellt.

2. Exemplarische Dokumentation von Materialien

Reihenplanung

Um den Einsatz der Materialien für die AG-Leitungen zu erleichtern, wurden für jedes Halbjahr der Jahrgangsstufen 5 bis 7 mögliche Anordnungen erstellt. Als Beispiel ist hier ein Ausschnitt des zweiten Halbjahrs der Jahrgangsstufe 7 dokumentiert (Abbildung 2). In der digitalen Version sind die Eintragungen in den Reihenplanungen mit Links versehen, sodass die Lehrkraft die Materialien durch Anklicken erreicht. Module wie „Wege auf Flächen und Körpern", „Flächenanteile" oder „Spielstände", die Olympiade-Aufgaben als Grundlage haben, wechseln mit handwerklichen Modulen wie „Zusammengesetzte Körper" oder Modulen wie „Parkettierung", die digitale Werkzeuge nutzen, ab. Eine Schwierigkeitsprogression findet jeweils in den Modulen statt, sodass die Reihenfolge in der Reihenplanung angepasst werden kann.

Schwierigkeitsprogression

Känguru-Wettbewerb

Die Schule, an der diese Planung zum Einsatz kam, hat in ihrem schulinternen Curriculum vereinbart, jährlich an dem Känguru-Wettbewerb teilzunehmen. Daher wurde darauf geachtet, dass zu passenden Zeitpunkten Informationen oder Trainingseinheiten für Wettbewerbe angeboten werden. In der dargestellten Reihe ist das in der KW 10 der Fall, kurz vor dem Termin des Känguru-Wettbewerbs. Die Warm-ups und die Ausstiege haben bewusst inhaltlich keinen Bezug zu den Hauptteilen, sodass in jeder Sitzung drei unterschiedliche Angebote erfolgen.

2 Direkter Zugang unter https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idcat=1964.

Sinus-MAfiSuS
Mathematische Angebote für interessierte Schülerinnen und Schüler

SINUS Nordrhein-Westfalen

Muster einer Reihenplanung für die Klasse 7 im zweiten Schulhalbjahr 2016/2017

KW	Datum	Warm Up	Hauptteil	Ausklang
5	30.01. – 03.02.	Gehaltserhöhung	Rund um den Kreis, Schüler-AB	Ping Pong
6	06.02. – 10.02.	Tulpen und Narzissen		Mastermind mehrdeutig
7	13.02. – 17.02.	Der Mittelpunkt eines Kreises	Rechnen mit Restklassen, Schüler-AB	Wolkenkratzer
8	20.02. – 24.02.	Blumen im Garten		Mathrax
9	27.02. – 03.03.	Die Wanderung	Bastelprojekt Pop-Up-Karten	Hashiwokakero
10	06.03. – 10.03.	Bunte Scheiben	Känguru Training, Schüler-AB	Set
11	13.03. – 17.03.	Eine interessante Zahl	Systematisches Probieren, Schüler-AB	Masyu
12	20.03. – 24.03.	Volle und leere Becher		Kreuzzahlrätsel
13	27.03. – 31.03.	Produkt und Summe gegeben	Winkel im Dreieck, Schüler-AB	Mathrax
14	03.04. – 07.04.	Handschuhe in der Schublade		Trio
15	Osterferien			

Abbildung 2: Ausschnitt aus der Reihenplanung zur AG in der 7. Jahrgangsstufe

Hauptteil: Modul „Wege auf Flächen und Körpern“

Dieses Modul beruht auf Olympiade-Aufgaben. Zu Beginn eines jeden Moduls wird den Lehrkräften ein aussagekräftiger Kurztext angeboten, in dem sie sich über die wesentlichen Inhalte und die benötigten Fähigkeiten oder die für die Aufgabenlösung hilfreichen Problemlösestrategien informieren können (Abbildung 3).

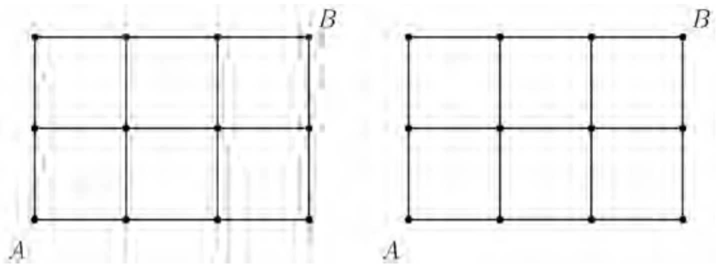
Problemlöse-strategien

> In dem Modul werden verschiedenste Fertigkeiten und Lösungsstrategien, die Schülerinnen und Schüler schon aus früheren Modulen bekannt sind, in einem neuen Kontext miteinander verknüpft. Neben geometrischer Anschauung werden die Schülerinnen und Schüler dazu angehalten, Zählstrategien und kombinatorische Fertigkeiten anzuwenden.
> Schrittweise werden auch die Kenntnisse aus dem Modul Mustererkennung abgerufen, die zu der Erstellung einer Berechnungsformel für die letzte Aufgabe führt.
> Bei allen Aufgaben geht es darum, Wege auf vorgegebenen Gitterstrukturen zu betrachten.

Abbildung 3: Kurzinformation für Lehrkräfte zum Modul „Wege auf Flächen und Körpern“

Es wird immer großer Wert darauf gelegt, dass zum Einstieg in ein Modul eine sehr einfache Aufgabe angeboten wird, die möglichst von allen Schülerinnen und Schülern erfolgreich bearbeitet werden kann, sodass zu Beginn alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer bereits ein Erfolgserlebnis verbuchen können (Abbildung 4).

Aufgabe 1:



Eine Ameise läuft auf Gitterlinien von *A* nach *B*. Von einem Gitterpunkt zum nächsten ist es immer 1 m.

a) Finde zwei Wege unterschiedlicher Länge, bei denen die Ameise keine Linie doppelt läuft.

b) Der kürzeste Weg der Ameise ist 5 m lang. Wie viele verschiedene Wege dieser Länge gibt es?

c) Wie lang ist der längste Weg, wenn die Ameise keinen Gitterpunkt zweimal besuchen darf?

Abbildung 4: Aufgabe 1 des Moduls „Wege auf Flächen und Körpern“

Die Musterlösungen, die zu jeder Aufgabe angegeben werden, sind hier nicht dokumentiert. Im Rahmen der Sitzung muss durch die Leitung der AG darauf geachtet werden, dass die unterschiedlichen und vor allem unterschiedlich erfolgreichen Strategien gegenseitig vorgestellt und – soweit möglich – auch durch die Schülerinnen und Schüler bewertet werden. In den Hinweisen zur Aufgabe und zum Unterrichtseinsatz wird auf Strategien, die zur Lösung der Aufgabe nützlich sind, hingewiesen. Wenn es möglich ist, werden den Leiterinnen und Leitern der AG auch alternative Lösungsansätze vorgestellt. Bei dieser Aufgabe wird auf einen Darstellungswechsel verwiesen, der eine größere Abstraktion durch die Buchstabencodierung erfordert, aber einen geringeren Aufwand bei der Dokumentation der Lösung bedeutet (Abbildung 5).

Darstellungswechsel

Hinweise zur Aufgabe und zum Unterrichtseinsatz:

In Aufgabenteil b) werden alle Schülerinnen und Schüler Wege der Länge 5 finden. Die Schwierigkeit liegt darin, zu begründen, dass auch wirklich alle Wege dieser Länge gefunden wurden. Dazu ist es sinnvoll, eine systematische Darstellung sämtlicher Wege zu betrachten, ein Verfahren, welches die Schülerinnen und Schüler schon aus früheren Modulen kennen. Die Systematik kann darin bestehen, die Wege wie in der Musterlösung des MO-Vereines einzeln zu zeichnen.
Alternativ kann man einen Darstellungswechsel vornehmen. Dabei werden die Wege durch das Gitter durch Buchstabenketten der Länge 5, die nur aus den Buchstaben o und r bestehen, betrachtet. Der Buchstabe o, der für eine Bewegung nach oben steht, muss zweimal vorkommen, der Buchstabe r dreimal.
Die Systematik besteht dann in einer alphabetischen Anordnung der Buchstabenfolgen:

```
oorrr – ororr – orror – orrro
roorr – roror – rorro – rroor – rroro – rrroo
```

Abbildung 5: Hinweise zum Einsatz von Aufgabe 1 aus dem Lehrertext

Schwierigkeitsprogression

In der nachfolgenden Aufgabe des Moduls erfolgt eine Schwierigkeitsprogression dadurch, dass nun die Wege auf einem räumlichen Gitter zurückgelegt werden (Abbildung 6).

Aufgabe 2:

Eine Ameise läuft auf den Kanten eines Würfels von Punkt *A* zum Punkt *G*. Von einem Eckpunkt zum nächsten ist es immer ein Meter.

a) Gib einen möglichst kurzen Weg für die Ameise an.
b) Wie viele verschiedene Wege dieser Länge gibt es? Gib diese an.
c) Wie lang ist der längste Weg, wenn die Ameise keine Ecke zweimal betreten darf? Gibt es mehrere Wege dieser Länge?

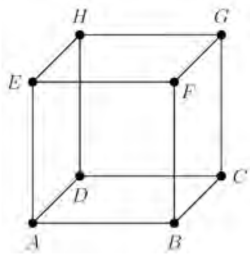


Abbildung 6: Aufgabe 2 des Moduls „Wege auf Flächen und Körpern“ aus dem Lehrertext

Zu dieser Aufgabe wird im Lehrermaterial empfohlen, bei Bedarf für die Schülerinnen und Schüler eine Bastelvorlage für einen Würfel bereitzustellen. Ferner wird ein Vorschlag gemacht, wie die Aufgabe in der Arbeitsgemeinschaft erweitert werden kann, um eine zusätzliche Schwierigkeitsprogression anzubieten (Abbildung 7).

Mögliche Erweiterungen der Aufgabe:

Für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler kann die Figur, in der die Wege gesucht werden, dadurch aufwendiger gestaltet werden, dass mehrere der Würfel auf- bzw. nebeneinander gestellt werden.

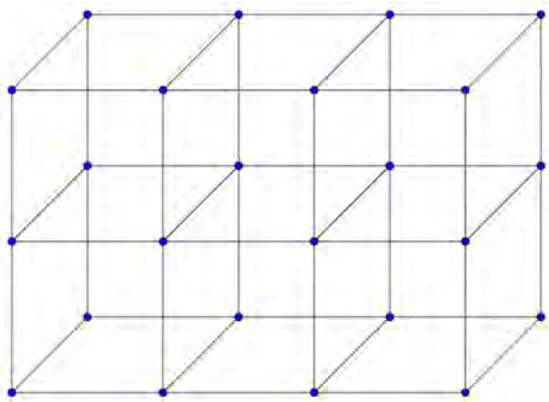


Abbildung 7: Vorschlag zur Erweiterung der Aufgabe 2

Die weiteren Aufgaben des Moduls haben andere Gitterstrukturen zur Grundlage (Abbildung 8). In den abschließenden Aufgaben geht es auch um Mustererkennung, wenn die Länge von Wegen in Abhängigkeit von ihrer Form betrachtet werden soll. Das Erstellen eines geeigneten Terms wird dann in einer Arbeitsgemeinschaft nicht mehr von allen Schülerinnen und Schüler selbstständig geleistet werden können.

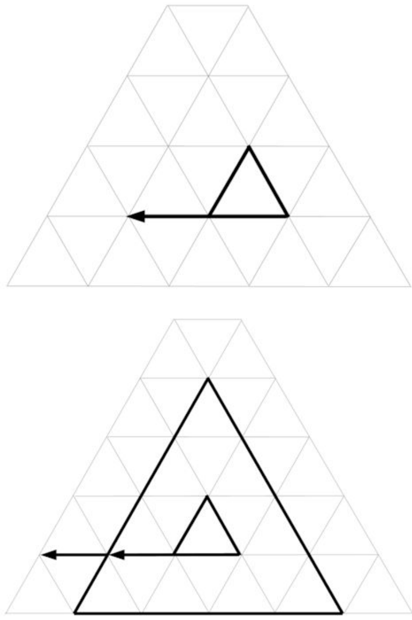
Aufgabe:

In dieser Aufgabe geht es um eine Ameise, die auf einem Dreiecksgitter, wie es in den Abbildungen gegeben ist, Wege entlangkrabbelt.

Im ersten Umlauf umkrabbelt die Ameise ein kleines Dreieck und geht zum Schluss noch eine Seitenlänge geradeaus, sodass sie im ersten Umlauf insgesamt vier Seitenlängen zurückgelegt hat.

Im zweiten Umlauf umläuft die Ameise ein größeres Dreieck, und zwar wählt sie den kürzesten Weg in Form eines Dreiecks um die bisher umlaufene Figur, die keine der bisher benutzten Kanten verwendet. Zum Schluss krabbelt sie wieder eine Seitenlänge nach außen, damit sie ihren nächsten Umlauf beginnen kann.

Auf diese Weise umkrabbelt die Ameise in weiteren Umläufen immer größere Dreiecke.



a) Wie viele Seitenlängen hat die Ameise am Ende des zweiten Umlaufs insgesamt zurückgelegt?
b) Wie viele Seitenlängen legt die Ameise im vierten Umlauf zurück?
c) In welchem Umlauf durchläuft die Ameise ihre insgesamt hundertste Seitenlänge?
d) Gib eine allgemeine Formel an, mit der man berechnen kann, wie viele Seitenlängen u(n) die Ameise im n-ten Umlauf zurückgelegt hat.

Abbildung 8: Abschließende Aufgabe des Moduls „Wege auf Flächen und Körpern“

Hauptteil Escher-Parkette

Dynamische Geometriesoftware

In den Materialien gibt es an mehreren Stellen Module zu Escher-Parketten, in denen die Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften solcher Parkette untersuchen und mit Hilfe einer Dynamischen Geometriesoftware (DGS) Parkette selber erstellen (im Ordner „Projekte und Spiele“). Der Schwerpunkt des hier dokumentierten Moduls liegt auf linearen Parketten, bei denen identische Kacheln reihenweise aneinander gefügt werden (im Unterordner „Parkette“). In anderen Modulen werden weitere Konstruktionsprinzipien der Escher-Parkette betrachtet, zum Beispiel mit gedrehten Kacheln (Unterordner „Parkett gedreht“).

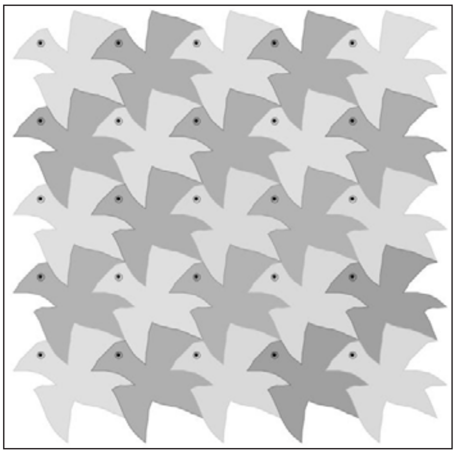
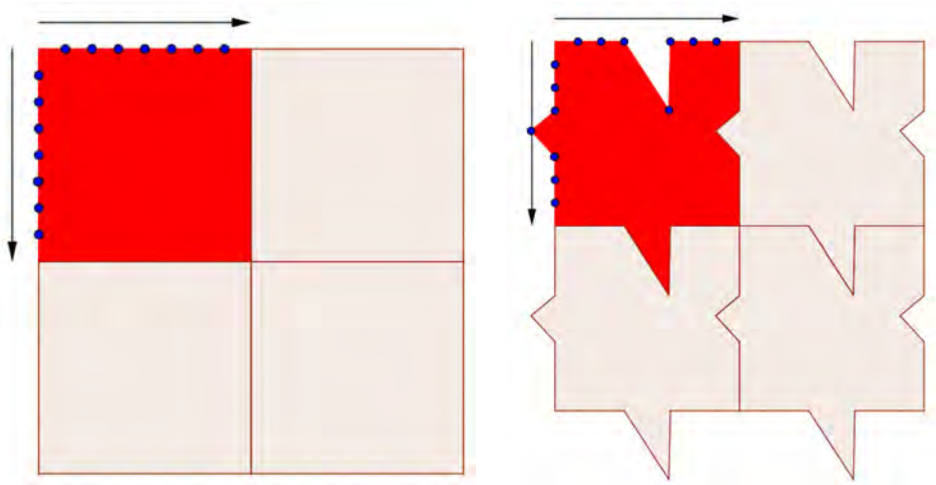


Abbildung 9: Mit Hilfe von GeoGebra nachgebildete Parkettierung

Mathematisches Café

Es bietet sich an, zum Einstieg und zur Motivation in der Arbeitsgemeinschaft einige lineare Escher-Parkette zu zeigen. Über das Internetportal des Mathematischen Cafés von Prof. Hebisch sind einige kommentierte Abbildungen zu finden (Hebisch, 2017, S. 105, 106, 127, 128). Eine bekannte Parkettierung mit Vögeln wurde nachgebildet und kann daher ohne Lizenzprobleme verwendet werden (Abbildung 9).



Vorgegebene quadratische Parkettierung mit Zugpunkten

Parkettierung nach dem Verziehen zweier Basispunkte

Abbildung 10: Ausgangssituation zur Parkettierung mit digitalem Werkzeug

Im ersten Schritt des Moduls sollen die Schülerinnen und Schüler spielerisch mit einer vorgegebenen Vorlage das Entstehen von Parketten analysieren. Dazu verwenden sie ein fertiges dynamisches Arbeitsblatt. In einem Feld von vier Quadraten sind einige wenige Ziehpunkte vorgegeben (Abbildung 10). Die Schülerinnen und Schüler beobachten, dass sich beim Ziehen an den markierten Punkten weitere Punkte automatisch mitbewegen und so aus einem Quadratmuster eine Parkettierung mit unregelmäßigen Kacheln entsteht.

Dokumentation

Wichtig ist, dass anschließend die Beobachtungen dokumentiert und händisch angewendet werden können. Dazu gibt es im Schülerarbeitsblatt konkrete Aufgabenstellungen. Eine Teilaufgabe aus dem Arbeitsblatt ist in Abbildung 11 dokumentiert.

2. In der rechten Abbildung wird der Punkt A nach außen gezogen. Welcher Punkt auf der rechten Seite der Kachel muss sich mitbewegen? Zeichne die neue Lage des Punktes ein. Vervollständige die rechte Kachelseite.

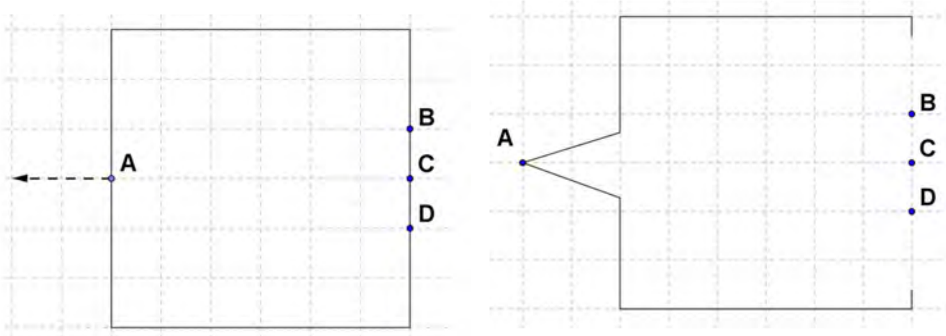


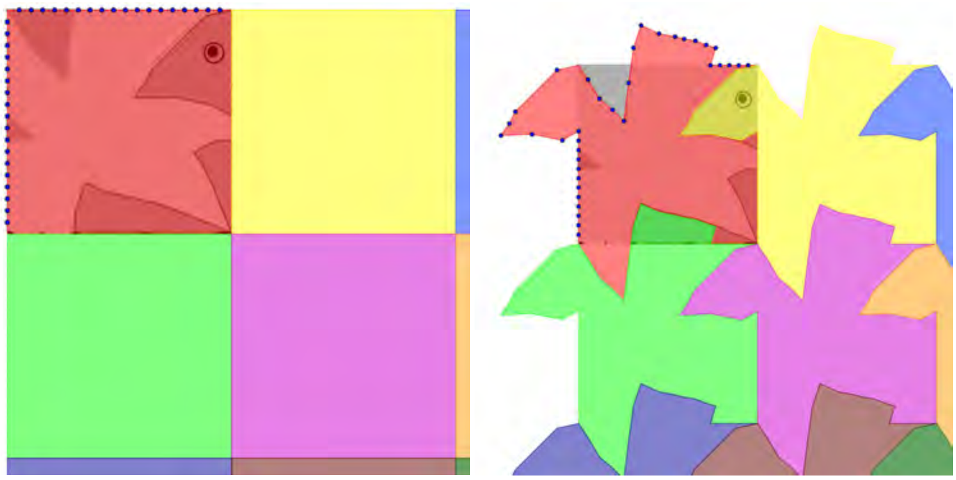
Abbildung 11: Aufgabe 2 zum händischen Zeichnen einer Escher-Kachel (Escherparkette_von_Hand.doxc)

Konstruktionsprinzip

Die folgenden Aufgaben lassen eine Progression der Schwierigkeit erkennen. Während die dokumentierte Aufgabe 2 von allen Schülerinnen und Schülern gelöst werden kann, die das Konstruktionsprinzip bei der spielerischen Untersuchung erfasst haben, ist bei der (nicht abgebildeten) Aufgabe 4 in stärkerem Maße händisches Konstruieren erforderlich.

Die Schülerinnen und Schüler können nun auf verschiedenen Niveaustufen weiterarbeiten. Manche möchten kreativ werden und mit Hilfe einer Vorlage schöne Parkette erzeugen (Abbildung 12), andere interessieren sich stärker dafür, wie man mit Hilfe des DGS die Koppelung der Punkte realisiert, sodass einige Basispunkte ausreichen, um das gesamte Parkett zu erzeugen. Dazu wurden Anleitungen erstellt, die die benötigten Elemente des DGS erklären. Zunächst empfiehlt es sich, eine einzelne Kachel zu erzeugen (Abbildung 13).

Aus einzelnen Kacheln kann ein komplettes Parkett zusammengesetzt werden. Dabei wird die Ausgangskachel geeignet verschoben. Auch dazu gibt es in den Materialien ein Blatt mit technischen Anleitungen für die Schülerinnen und Schüler. Schülerinnen und Schüler, die sich nicht in die Bedienung des DGS in dieser Tiefe einarbeiten möchten und auch wenig Lust am kreativen Arbeiten haben, können auch mit Kacheln, die sie aus vorgegebenen Parketten isolieren, Parkette nachbilden. Ein Beispiel ist im Material enthalten, weitere können die Schülerinnen und Schüler selbstständig durch Recherche finden.



Vorlage mit Zugpunkten und hinterlegter Kachel

Einige Punkte sind bereits so gezogen, dass ein Teil der Vogelkachel entsteht.

Abbildung 12: Muster-Vorlage als GeoGebra-Datei (Vogelparkett_Vorlage.gbb)

Arbeitsblatt 2a:
Anleitung zur Erstellung von Kacheln für eine Escher-Parkettierung

Mit GeoGebra kannst du Kacheln für eine Escher-Parkettierung erstellen. Wenn du an der einen Seite etwas veränderst, dann werden automatisch die passenden Veränderungen an der gegenüberliegenden Seite durchgeführt.

1. Starte das Programm und schließe zunächst das Algebra-Fenster links.

2. Mache im Grafik-Fenster die Achsen unsichtbar und das Koordinatengitter sichtbar. Benutze folgende Symbole:

Das linke Symbol schaltet die Koordinatenachsen ein und aus, das rechte Symbol schaltet das Koordinatengitter ein und aus.

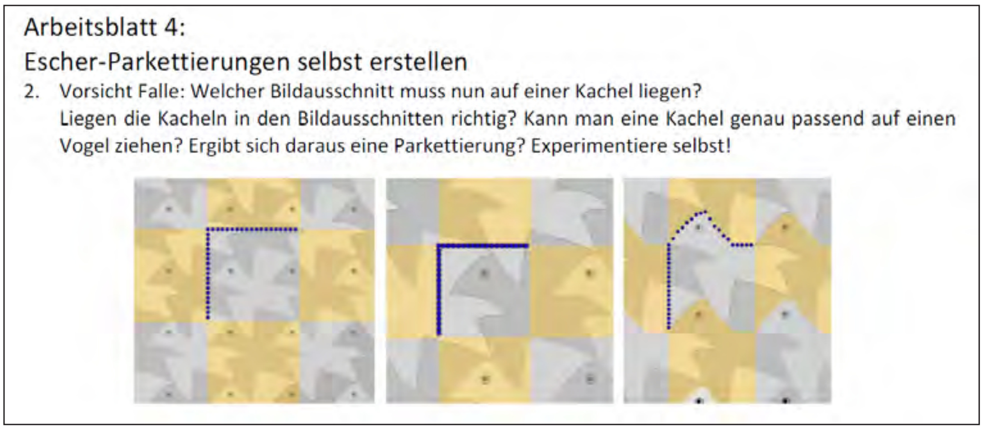
3. Nun werden die Punkte, an denen später gezogen werden kann, auf die Kreuzungspunkte des Koordinatengitters gesetzt. Den Button für das Setzen eines Punktes findest du in der Werkzeugleiste an der zweiten Stelle von links.

   Hier sind schon einige Punkte gesetzt.

Abbildung 13: Ausschnitt aus der Anleitung zur Erstellung einer Escher-Kachel mit GeoGebra (Anleitung_Kachelerstellung_linear.docx)

Wenn die Schülerinnen und Schüler dabei nicht die Vorlage mit der hinterlegten Kachel benutzen, sondern eine Kachel aus einem anderen Parkett verwenden möchten, ist es für sie nicht ganz einfach, aus einem fertigen Parkett eine geeignete Kachel zu identifizieren.

Typische Fehlerquellen werden von den Schülerinnen und Schülern selbstständig entdeckt (Abbildung 14), deren Ursachen beschrieben, und schließlich werden daraus Bedingungen abgeleitet, die eine korrekte Kachel beschreiben. Sowohl in der Dokumentation für die Lehrkräfte (Escher_Lehrertext.docx) als auch in den Arbeitsblättern für die Schülerinnen und Schüler (Escherparkette_selbst.docx) sind Beispiele für fehlerhafte Kacheln beschrieben.



Arbeitsblatt 4:

Escher-Parkettierungen selbst erstellen

2. Vorsicht Falle: Welcher Bildausschnitt muss nun auf einer Kachel liegen?
Liegen die Kacheln in den Bildausschnitten richtig? Kann man eine Kachel genau passend auf einen Vogel ziehen? Ergibt sich daraus eine Parkettierung? Experimentiere selbst!

Abbildung 14: Ausschnitt aus dem Schülerarbeitsblatt mit typischen Fehlern beim Identifizieren einer Kachel

Ausklang: „Mastermind-Kärtchen“

Das Spiel Mastermind ist bei Schülerinnen und Schülern in der heutigen Zeit weitgehend unbekannt. Auch bei Lehrkräften ist das Spiel nicht flächendeckend bekannt. Daher wird in den Materialien vorgeschlagen, zunächst am Ende von zwei AG-Sitzungen das Spiel einfach nur durch die Schülerinnen und Schüler spielen zu lassen. Eine detaillierte Anleitung für das Spiel wurde formuliert und liegt dem Materialpaket bei (Mastermind.docx).

Nachdem die Schülerinnen und Schüler mit den Regeln von Mastermind vertraut sind und einige einfache Strategien bei ihren Spielen erfahren haben, bearbeiten sie in weiteren Sitzungen konkrete Aufgaben zum Ausklang. Diese Aufgaben sind auf Mastermind-Kärtchen zusammengestellt. Es handelt sich jeweils um Spielfelder, die bereits soweit ausgefüllt sind, dass man mit logischen Überlegungen im nächsten Schritt die richtige Reihenfolge eindeutig ermitteln kann (Abbildung 15). Bei den Mastermind-Kärtchen geht es in der AG nicht nur darum, die richtige Reihenfolge im nächsten Schritt zu finden. Es sollte auch darauf geachtet werden, dass die Schülerinnen und Schüler begründen, warum diese Reihenfolge die richtige sein muss, und die Begründung dokumentieren, eine wichtige Kompetenz aus dem Bereich Argumentieren/Kommunizieren.

Eine wichtige Rolle spielt jeweils auch die Überlegung, dass die Reihenfolge eindeutig bestimmt ist. Unterschiedliche Problemlösestrategien wie Fallunterscheidungen und systematisches Arbeiten und Probieren kommen dabei zum Einsatz.

Zu jedem Kärtchen gibt es für die Lehrkraft einen Lösungsvorschlag, der auch eine mögliche Dokumentation der Lösungsschritte enthält (Abbildung 16).

Im Projekt wurden auch Mastermind-Kärtchen erstellt, bei denen nach den Vorgaben die Lösung noch nicht eindeutig zu finden ist. Dabei kann angegeben werden, wie viele Lösungen es noch gibt. Diese Angabe kann aber auch fehlen, sodass noch eine weitere Schwierigkeit bei der Bearbeitung auftritt. Die Schülerinnen und Schüler sollen nun *alle* Lösungen angeben (Abbildung 17). Dazu ist es unbedingt erforderlich, dass systematisch bestimmte Konstellationen ausgeschlossen und Teillösungen genauer untersucht werden. Die Schülerinnen und Schüler sind nun gezwungen, auf klassische Methoden des Problemlösens, wie Fallunterscheidungen und kombinatorische Überlegungen, zurückzugreifen.

kombinatorische Überlegungen

Am Ende der Klasse 6 wird der Einsatz eines ersten mehrdeutigen Kärtchens angeboten. Weitere Kärtchen dieser Art sind als Ausklänge für die nachfolgenden Jahrgänge 7 und 8 vorgesehen.

Mastermind-Kärtchen 1a

Durch die Ergebnisse kann man in der nächsten Zeile eindeutig die richtige Reihenfolge bestimmen. Bestimme diese Reihenfolge und begründe, wie du sie gefunden hast.

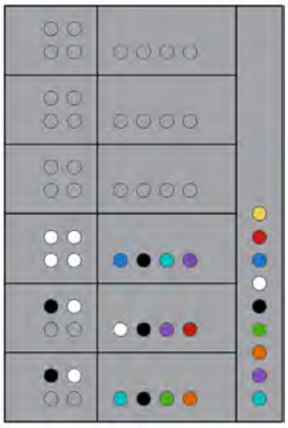


Abbildung 15: Mastermind-Kärtchen mit einer sehr einfachen Argumentation

Mastermind-Kärtchen 1a – Lösungsvorschlag

In Zeile 3 sind bereits die richtigen Farben gefunden worden, jedoch befindet sich keine an der richtigen Position. Damit ist der schwarze Stecker in den Zeilen 1 und 2 auch nicht an der richtigen Position. Außer schwarz kommt von den richtigen Farben in Zeile 2 noch violett vor, in Zeile 1 türkis, jeweils an der richtigen Position.
Damit ist die Reihenfolge bekannt:
türkis – blau – violett – schwarz.

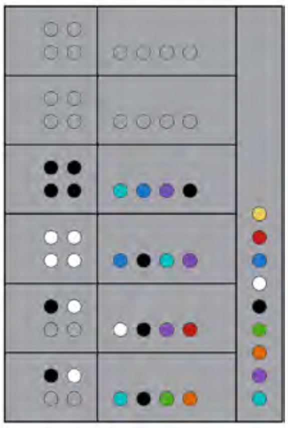


Abbildung 16: Lösung mit Dokumentation der Argumente

Mastermind-Kärtchen mehrdeutig 1

Durch die Ergebnisse in der unteren Abbildung kann man noch nicht die richtige Reihenfolge eindeutig bestimmen.
Welche weiteren Lösungen erfüllen die unteren Bedingungen ebenfalls?
Gib alle Lösungen an und begründe, warum es keine weiteren Lösungen geben kann.

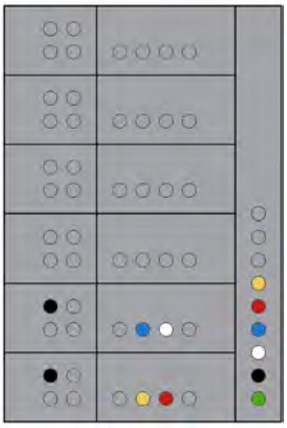


Abbildung 17: Beispiel eines Mastermind-Kärtchens mit mehrdeutiger Lösung

3. Erfahrungsbericht, Rückmeldungen

Einsatz der Materialien

Die Materialien wurden von den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Sets eingesetzt und erprobt. Der Einsatz erfolgte sowohl in regelmäßigen Arbeitsgemeinschaften als auch bei mathematischen Wochenenden, die vor allem von Kolleginnen und Kollegen besucht wurden, die bereits Förderangebote für begabte und interessierte Lernende durchführten.

Förderangebote

Alle Rückmeldungen waren durchweg positiv. Hervorgehoben wurde die Abwechslung zwischen Modulen, die Wettbewerbsaufgaben der Mathematikolympiade zur Grundlage haben, und solchen, die mit handwerklichen Tätigkeiten zu bearbeiten sind. Von Schülerinnen und Schülern der Mathematischen Sommerakademie[3] wurden die drei Phasen Warm-up, Hauptteil und Ausklang besonders gelobt. Gerade die mathematischen Spiele führten dazu, dass sie sich auch nach den Sitzungen weiter damit beschäftigten.

Dass auch die Warm-ups eine motivierende Funktion haben, kann unter anderem daran festgemacht werden, dass sich Schülerinnen und Schüler bereits an den Aufgaben „festgebissen" hatten und die Leitung entsprechend flexibel zusammen mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern entscheiden musste, ob für den Hauptteil ausreichend Zeit übrig blieb.

Die Bandbreite des Einsatzes der Materialien ist sehr groß. In den meisten Fällen konnten gar nicht alle Angebote eingesetzt werden, denn an vielen Schulen finden mathematische Arbeitsgemeinschaften in einem kürzeren Zeitrahmen oder nicht wöchentlich statt. Durch die hohe Variabilität der erstellten Materialen gelang es aber leicht, diese an die jeweiligen Bedingungen anzupassen. Herausfordernd sind aber Sitzungen mit nur einer Schulstunde, da die Dreiteilung in Warm-up, Hauptteil und Ausklang nur mit Schwierigkeiten umzusetzen ist.

Variabilität

Leistungsfähigkeit

In Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit und der Leistungsbereitschaft der Teilnehmerinnen und Teilnehmer der AG war für manche Module ein anderer Zeitrahmen als die vorgesehenen zwei Sitzungen erforderlich. Ein Zusammenhang mit bestimmten Modulen konnte aber nicht festgestellt werden, sodass die Gründe dafür vermutlich in der Zusammensetzung der AG zu suchen sind. Zudem mussten Module, die einen größeren Technikeinsatz erfordern, gelegentlich zurückgestellt werden, weil keine ausreichende Anzahl an Computern vorhanden war oder aber Programme nicht installiert werden konnten.

Neben allgemeinen Rückmeldungen wurden Kolleginnen und Kollegen gebeten, uns Erfahrungen zum Einsatz der Materialien in Arbeitsgemeinschaften mitzuteilen. Diese sind auf der Webseite zum Projekt zusammengefasst. Nachfolgend sind zwei Rückmeldungen von Kolleginnen und Kollegen zum Einsatz der Materialien dokumentiert.

Parkettierung

An der Alexander-Coppel-Gesamtschule in Solingen wird seit dem Schuljahr 2013/2014 im Rahmen der Übermittagsbetreuung für interessierte Schülerinnen und Schüler aus den Jahrgangsstufen 5 und 6 der „Mathe-Club" angeboten. Eine Einheit dauert 65 Minuten und ist nach dem Konzept von MAfiSuS aufgebaut.

3 Mathematische Sommerakademie NRW des Landesverbandes Mathematikwettbewerbe, https://www.soak-nrw.de/.

Das Projekt „Parkettierung“ wurde in drei Sitzungen durchgeführt. Als Grundlage dienten die Materialien des Projekts, wobei besondere Schwerpunkte gelegt wurden auf

- die Analogie von GeoGebra zum Arbeiten mit Papier, Schere und Konstruktionswerkzeugen,
- das Konzept der Parkettierung (überschneidungs- und lückenfreie Überdeckung mit kongruenten Figuren),
- die Vertiefung der geometrischen Abbildung „Verschiebung“.

intuitiver Zugang

Die Escher-Parkettierungen ermöglichten einen intuitiven Zugang zum Thema „Parkettierung“ und motivierten die Schülerinnen und Schüler sehr zur intensiven Auseinandersetzung. Dabei motivierte der ästhetische Zusammenhang von Mathematik und Kunst. Die vorhandenen GeoGebra-Dateien und insbesondere die Vorlage für das Erstellen eigener Kacheln haben die Schülerinnen und Schüler beim entdeckenden Lernen der Zusammenhänge und dem Erstellen eigener Parkettierung zielgerichtet unterstützt. Durch fehlerhaftes Verwenden eigener Mustervorlagen konnten systematische Fehler erkannt, benannt und im Anschluss auch vermieden werden. Darüber ließ sich das Konzept der Parkettierung sehr gut altersgerecht vertiefen, dennoch fiel die Umsetzung eigener Ideen mit Hilfe der DGS schwer. In diesen Fällen konnte aber auf die Datei Mustervorlage_linear.ggb zurückgegriffen werden. Die Schülerinnen und Schüler konnten ganz unterschiedliche Schwerpunkte einbringen: Manche haben sich sehr intensiv mit den Möglichkeiten von GeoGebra auseinandergesetzt, andere haben sich besonders auf die kreative Ausarbeitung einer möglichst schönen Parkettierung konzentriert.

Mastermind-Kärtchen

Die Mastermind-Aufgaben wurden am Leibniz-Gymnasium Essen im Rahmen einer wöchentlichen einstündigen Mathematik-AG eingesetzt. Bereits mit dem Erfassen der Spielregeln diskutierten die Schülerinnen und Schüler intensiv und hochmotiviert über Aufgaben und Lösungen; häufig wurde auch außerhalb der AG-Sitzungen weiter diskutiert und das Spiel gespielt. Kritisch beobachteten wir, dass die Aufgaben ausschließlich intuitiv und nicht strukturiert gelöst wurden. Erst die Frage nach der Anzahl aller möglichen Lösungen motivierte zu Fallunterscheidungen, zum Ausschließen von Teillösungen und vor allem zum Begründen von eindeutigen Aussagen (Abbildung 17).

4. Zusammenfassung, Schlussfolgerungen, Perspektiven

vertretbarer Aufwand

Die vorhandenen Materialien des Projektes MAfiSuS, in Kombination mit den beigefügten Handreichungen für Lehrkräfte, ermöglichen es Lehrerinnen und Lehrern, eine interessante und ansprechende AG für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler mit vertretbarem Aufwand anzubieten.

Die Materialen sind für die Jahrgangsstufen 5 bis 7 vollständig ausgearbeitet. Zur entsprechenden Förderung älterer Schülerinnen und Schüler kann die Materialienreihe fortgesetzt werden. In diesem Rahmen bietet es sich an, neben den Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade auch die stark anwendungsbezogenen Aufgaben der A-lympiade zu verwenden. An der Aufbereitung von A-lympiade-Aufgaben wird derzeit von motivierten Lehrkräften gearbeitet.

Ebenso sollen verstärkt Module zur Anwendung von elektronischen Werkzeugen wie beispielsweise Funktionsplotter, Tabellenkalkulation usw. angeboten werden.

Kolleginnen und Kollegen, die sich bisher noch nie mit Förderangeboten beschäftigt hatten, konnten nur in geringer Zahl erreicht werden. Wünschenswert wäre es, dass mehr Schulen auch mathematische Angebote im Rahmen von Arbeitsgemeinschaften anbieten. Vielleicht gelingt es zudem, dass einige der Projekte im Rahmen des normalen Mathematikunterrichts eingesetzt werden, um damit auch Schülerinnen und Schüler zu motivieren, an regionalen oder überregionalen Wettbewerben teilzunehmen oder sich in ihrer Freizeit mit mathematisch herausfordernden Fragestellungen auseinanderzusetzen.

Arbeitsgemeinschaften

Dieses SINUS-Projekt ermöglicht ein Förderangebot im Sinne der gemeinsamen Initiative von Bund und Ländern zur Förderung leistungsstarker und potenziell besonders leistungsfähiger Schülerinnen und Schüler (2016).

Literatur

Bernert, C., Grande, V., Roeseler, K. & Stroth, K. (2008). *Mathematischer Korrespondenzzirkel Göttingen*. Verfügbar unter http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel/infoseite/index.html [05.12.2017].

Hebisch, P. D. (2017). *Mathematisches Café*. Verfügbar unter http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/escher.html [04. 12 2017].

König, H. (1996). *Aufgabensammlungen für Arbeitsgemeinschaften und Anleitungen für AG-Leiter.* Verfügbar unter http://www.sn.schule.de/~bezirkskomitee/AUFGS-Uebersicht.htm [04.12.2017].

Kultusministerkonferenz (2016). Gemeinsame Initiative von Bund und Ländern zur Förderung leistungsstarker und potentiell besonders leistungsfähiger Schülerinnen und Schüler. (Bundesministerium für Bildung und Forschung, Hrsg.). *Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 10.11.2016*.

Mathematik Olympiaden e.V. (2017). *Mathematik-Olympiaden*. (Hereus-Verlag, Hrsg. & M. O. e.V., Produzent). Verfügbar unter http://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/jahresbaende [05.12.2017].

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2013). *Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht. Materialien und Anregungen zur Unterrichtsentwicklung – Berichte aus den SINUS.NRW-Projekten* (SINUS.NRW, Nr. 9050/1, 1. Aufl.). Handreichung. Düsseldorf.

Qualitäts- und Unterstützungsagentur – Landesinstitut für Schule NRW (2017). *SINUS NRW*. Verfügbar unter www.sinus.nrw.de [05.12.2017].

Projektgruppe

Set-Mitglieder:

Dr. Thomas Giebisch, Leibniz-Gymnasium, Remscheid
Gaby Heintz, Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung, Neuss
Steffen Heyroth, Leibniz-Gymnasium, Essen
Matthias Lippert, Röntgen-Gymnasium, Remscheid
Dr. Frederik Magata, Gymnasium Gerresheim, Düsseldorf
Stefan Möllenberg, Gymnasium Gerresheim, Düssledorf
Dr. Holger Reeker, Reinoldus- und Schiller-Gymnasium, Dortmund
Burkhard Rüsing, Collegium Augustinianum Gaesdonck, Goch
Ellen Voigt, Gymnasium Bayreuther Straße, Wuppertal

Projektkoordination:

Michael Rüsing, B. M. V. – Gymnasium, Essen