Susann Dreibholz, Ulrich Hoffert und Andreas Büchter

Unterrichtskonzepte für die gymnasiale Oberstufe – Erprobte Ideen zur Umsetzung des Mathematikkernlehrplans in Nordrhein-Westfalen

Im Rahmen dieses SINUS-Projekts wurden Unterrichtskonzepte und -sequenzen entwickelt, mit denen der kompetenzorientierte Kernlehrplan für die gymnasiale Oberstufe in NRW (MSW, 2014)[1] zeitgemäß umgesetzt werden kann. Dabei wurde am Beispiel des grafikfähigen Taschenrechners insbesondere auch die obligatorische Nutzung von digitalen Werkzeugen berücksichtigt.

digitale Werkzeuge

Entstanden sind Unterrichtssequenzen aus sämtlichen Inhaltsfeldern des Kernlehrplans, sowohl für die Einführungsphase als auch für Leistungs- und Grundkurse in der Qualifikationsphase. Alle entwickelten Unterrichtssequenzen wurden in der Praxis erprobt und bei Bedarf überarbeitet. Die Materialien können Lehrkräften in der gymnasialen Oberstufe Anregungen geben und sie unterstützen, einen kompetenz- und verstehensorientierten Mathematikunterricht zu planen, durchzuführen und zu reflektieren. Zu diesem Zweck werden in den vorliegenden Materialien die im Unterricht direkt einsetzbaren Arbeitsblätter durch Anmerkungen, die bei der Unterrichtsplanung hilfreich sein können, sowie didaktische und methodische Hinweise ergänzt. Die jeweiligen Unterrichtssequenzen sind direkt an den schulinternen Beispiellehrplan (QUA-LiS NRW, 2014)[2] angebunden.

Wissenschaftliche Beratung und Unterstützung erhielt die Projektgruppe durch Prof. Dr. Andreas Büchter von der Universität Duisburg-Essen (Fakultät für Mathematik, Arbeitsbereich Didaktik der Mathematik).

1. Projektbeschreibung

Ausgangspunkt dieses Projektes war der Gedanke, auf der Basis des Kernlehrplans Mathematik SII (MSW, 2014) Unterrichtssequenzen für die gymnasiale Oberstufe zu entwickeln und in der Praxis zu erproben, bei denen folgende Aspekte Berücksichtigung finden sollten:

- Prozessbezogene Kompetenzen im Fokus der Unterrichtsgestaltung
- Konzepte für einen kumulativen Kompetenzerwerb
- Förderung des selbstregulierten Arbeitens von Schülerinnen und Schülern
- Sinnstiftender Einsatz eines grafikfähigen Taschenrechners

Im Hinblick auf den Bildungsauftrag des Mathematikunterrichts in der gymnasialen Oberstufe stellt neben einem kumulativen Kompetenzerwerb auch die inhaltli-

1 https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe/mathematik.
2 Ebd. unter „Hinweise und Beispiele“.

che und prozessbezogene Verstehensorientierung einen weiteren zentralen Aspekt in der Projektarbeit dar.

In einigen Unterrichtssequenzen sind bereits veröffentlichte gelungene Ideen und Ansätze vorausgegangener SINUS-Projekte weiterentwickelt (vgl. Pallack et al., 2007[3]; Hoffert, 2013) und an die Rahmenbedingungen der aktuellen Kernlehrpläne angepasst worden. Alle Materialien wurden an mehreren Schulen erprobt. Die dort gesammelten Erfahrungen wurden genutzt, um die erstellten Materialien weiterzuentwickeln und hilfreiche Hinweise zur Umsetzung zu geben. Diese finden sich dann in den didaktischen Kommentaren zu den einzelnen Unterrichtssequenzen.

www.sinus.nrw.de

Die angefertigten Unterrichtssequenzen sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Alle dargestellten Unterrichtssequenzen aus diesem Projekt stehen auf der Internetseite www.sinus.nrw.de als Download zur Verfügung. Die entwickelten Unterrichtssequenzen können als Bausteine den eigenen Unterricht anreichern und ergänzen. Vorschläge zur Integration in entsprechende Unterrichtsreihen werden jeweils dargestellt.

Exemplarisch wird in diesem Kapitel aus den drei Inhaltsfeldern („Funktionen und Analysis", „Analytische Geometrie und lineare Algebra", „Stochastik") jeweils eine Unterrichtssequenz vorgestellt. Diese sind in der nachfolgenden Tabelle kursiv gesetzt.

Die Unterrichtssequenzen werden im anschließenden Kapitel in der Regel mit folgenden Punkten vorgestellt:

- Kurzbeschreibung der Unterrichtssequenz
- Prozessorientierte Schwerpunkte
- Didaktische Hinweise
- Einordnung in die Reihenplanung
- Einführende Problemstellung
- Materialbeispiele

3 Dank gilt vor allen Dingen den Autorinnen und Autoren des Kapitels „Kumulation statt Flächeninhalt – mit verschiedenen Kontexten in die Integralrechnung". In: Pallack, A. et al. (2007), Impulse für den Mathematikunterricht in der Oberstufe – Konzepte und Materialen aus dem Modellversuch. (MSW, Hrsg.)

Tabelle 1: Übersicht über die erarbeiteten Unterrichtssequenzen

Stufe	*Unterrichtssequenz*	*Lehrplanthema*[4]	*Inhaltsfeld*
EF	Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate	E-A2	Analysis
	Die Entdeckung der Ableitungsfunktion über die rechnergestützte Erfassung von Tangentensteigungen	E-A4	Analysis
	Funktionsuntersuchungen	E-A4	Analysis
	Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen	E-S1	Stochastik
Q	Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen	Q-LK-A2	Analysis
	Von der Änderungsrate zum Bestand. Von der Randfunktion zur Integralfunktion	Q-LK-A3/4	Analysis
	Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen	Q-LK-G2	Analytische Geometrie
	Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen.	Q-LK-S1	Stochastik
	Ableitung der Exponentialfunktion	Q-GK/LK-A5	Analysis
	Stochastische Prozesse	Q-GK-S4 Q-LK-S6	Stochastik
	Normalverteilung	Q-LK-S4	Stochastik

2. Unterrichtssequenzen

Analysis – Die Entdeckung der Ableitungsfunktion über die rechnergestützte Erfassung von Tangentensteigungen

Für das Lehrplanthema „Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen“ (QUA-LiS NRW, 2014, S. 28f. (E-A4)) sind im SINUS-Projekt zwei Unterrichtssequenzen entwickelt worden. Die erste hat ihren Schwerpunkt in der Entdeckung der Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen mithilfe des grafikfähigen Taschenrechners und wird im Folgenden dargestellt, die zweite beschäftigt sich mit der verstehensorientierten Einführung von Elementen einer Funktionsuntersuchung.

Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen

Kurzbeschreibung der Unterrichtssequenz

Die Unterrichtssequenz beschreibt eine Möglichkeit, an einem einfachen Kontext die Ableitungsfunktion und daraus folgend die Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen zu entdecken. Der grafikfähige Taschenrechner unterstützt in dieser Sequenz die Vernetzung zwischen der anschaulichen Ebene mit den formalen Schreibweisen, verringert die Anzahl der sich wiederholenden Rechenschritte und hilft somit, den Blick auf die zu entdeckenden mathematischen Strukturen der Ableitungsregeln zu lenken. Über die grundlegenden Techniken des grafikfähigen Taschenrechners (GTR) hinausgehende Funktionen werden kleinschrit-

4 Diese Bezeichnungen orientieren sich am schulinternen Beispiellehrplan (QUA-LiS NRW, 2014).

tig und mit zahlreichen Screenshots dargestellt. Diese Techniken können von den Schülerinnen und Schülern z. T. nicht in schriftlichen Leistungsüberprüfungen verlangt werden, sondern beziehen sich ausdrücklich auf die vorgestellte Unterrichtssequenz.

Messwerterfassung

Der grafikfähige Taschenrechner wird zur Messwerterfassung der Tangentensteigungen genutzt, die durch Modellierung in die Darstellung des Graphen und der Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion münden. Anhand der Ergebnisse einiger weniger so erstellter Ableitungsfunktionen können die Ableitungsregeln (Potenz-, Faktor-, Summenregel) erschlossen werden. Die innerhalb dieser Unterrichtssequenz erlangten Techniken können im weiteren Unterrichtsgang auch zur Bestimmung der Ableitungsfunktionen der trigonometrischen Funktionen genutzt werden.

Die Unterrichtssequenz gliedert sich in vier Abschnitte, die insgesamt ca. vier Unterrichtsstunden im Umfang von je 45 Minuten umfassen.

Prozessorientierte Schwerpunkte

Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners (GTR)

Die Nutzung des grafikfähigen Taschenrechners geht in dieser Sequenz über die normalen Routinetechniken hinaus. Durch die Verknüpfung von Darstellungsarten und die Möglichkeit des grafischen Messens von Steigungen wird der Prozess des entdeckenden Lernens vorbereitet.

Entdeckendes Lernen

Die Unterrichtssequenz ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern, die Regeln zur Bestimmung der Ableitungsfunktion bei ganzrationalen Funktionen zu entdecken. Dabei werden die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler im Bereich „Argumentieren“ weiterentwickelt.

Didaktische Hinweise

Die Betrachtung der Ableitung einer Funktion an einer Stelle – sei es funktional im Sinne der lokalen Änderungsrate oder geometrisch im Sinne der Steigung des Funktionsgraphen an dieser Stelle – ist nur dann interessant, wenn die lokale Änderungsrate bzw. die Steigung an anderen Stellen auch andere Werte annimmt. Andernfalls würde es sich um eine lineare Funktion handeln, sodass der Begriff der Steigung einer linearen Funktion genügen würde und der Begriff Ableitung nicht motiviert wäre. Die Betrachtung der Ableitungsfunktion ist von dieser Einsicht aus als umfassende Beschreibung der lokalen Änderungsrate bzw. der Steigung direkt naheliegend. Dabei ist aus Sicht der Schülerinnen und Schüler zunächst völlig offen, ob es einfache Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion gibt.

grafische Erkundung

In dieser Unterrichtssequenz wird mithilfe des grafikfähigen Taschenrechners im Unterricht ein Tool entwickelt, das eine grafische Erkundung des Zusammenhangs zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion ermöglicht. Die Schülerinnen und Schüler können dabei auf der Grundlage ihres Verständnisses der Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle, die der Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen in dem zugehörigen Punkt entspricht, erfahren und verstehen, wie der Graph der Ableitungsfunktion entsteht.

Die Schülerinnen und Schüler haben im Analysis-Unterricht bisher vor allem Erfahrungen im Umgang mit ganzrationalen Funktionen gesammelt, daher sind sie in der Lage, anhand des Graphen der Ableitungsfunktion selbstständig tragfähige Vermutungen zur Art der Ableitungsfunktion aufzustellen. Nach einer Konkretisierung der Gleichung der Ableitungsfunktion können die Zusammenhänge mit der Gleichung der Ausgangsfunktion systematisch untersucht werden. Die Gleichung der Ableitungsfunktion wird dabei ausgehend vom Graphen mittels einer Regression aufgestellt, die dabei als „Black Box“ mit dem GTR eingesetzt wird.

Bei der beschriebenen Unterrichtssequenz ist in der Regel eine Anleitung der Schülerinnen und Schüler bei der zielführenden Nutzung des grafikfähigen Taschenrechners erforderlich. Erfahrungsgemäß bearbeiten leistungsstärkere bzw. technisch versierte Schülerinnen und Schüler die vorgeschlagenen Aufgaben erheblich schneller. Es hat sich dann für alle Beteiligten als produktiv erwiesen, wenn jene als Expertinnen bzw. Experten zur Verfügung stehen.

Einordnung in die Reihenplanung

Diese Unterrichtssequenz kann im Anschluss an die Einführung des Ableitungsbegriffes mithilfe des Differentialquotienten durchgeführt werden. Sinnvollerweise sollte auch das grafische Ableiten durch die Schülerinnen und Schüler beherrscht werden. Im Anschluss bietet es sich an mit Funktionsuntersuchungen zu beginnen. Ein möglicher Vorschlag ist ebenfalls innerhalb des SINUS-Projektes entwickelt worden (E-A4).

Differentialquotient

UE	*Sequenz*	*Material*	*Mögliche Arbeitsform*	*Zeit*
1	„Romantisches Picknick mit Happy End?“ Messwerterfassung der Tangentensteigung mit dem GTR	M1, M2 (GTR)	Partnerarbeit	60
2	Rückbezug auf den Sachverhalt	M2	Gruppenarbeit	15
3	Untersuchung weiterer Funktionen, Ableitungsregeln	M3	Einzelarbeit	45
4	Formulierung der Ableitungsregeln, Anwendungsaufgaben	eingeführtes Schulbuch		45

Die einführende Problemstellung

„Romantisches Picknick mit Happy End?“

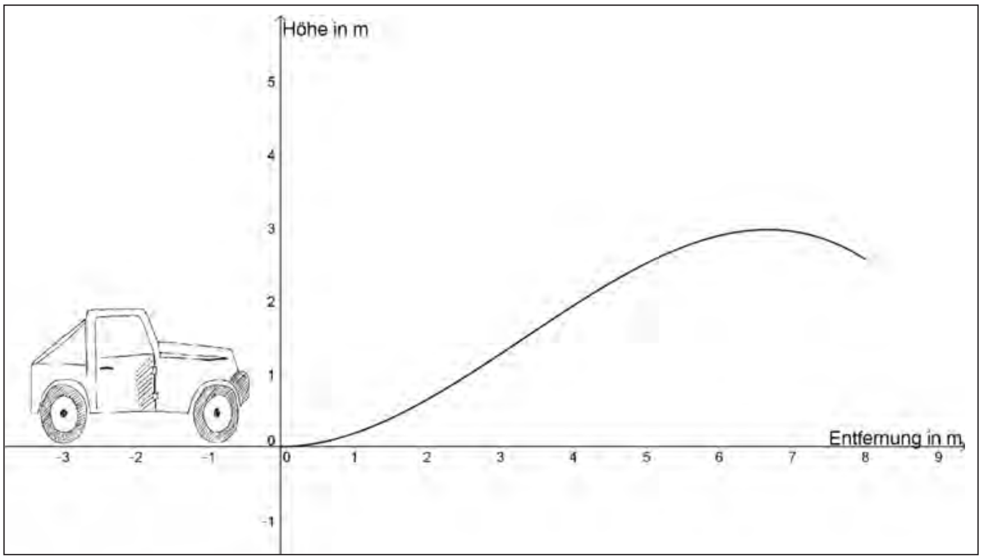


Abbildung 1: *Arbeitsblatt M1* ‚Picknick mit Happy End‘

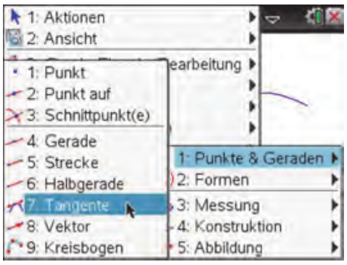
Jan macht mit seiner Freundin Inga Urlaub in Italien. Um Abwechslung in den Strandurlaub zu bringen, leihen sie sich einen Geländewagen aus und machen eine Spritztour ins nahegelegene Gebirge. Nachdem sie in einem wildromantischen, einsamen Bachtal gepicknickt haben, wird ihnen bewusst, dass sie den unbefestigten, steilen Hügel auch wieder hochfahren müssen.

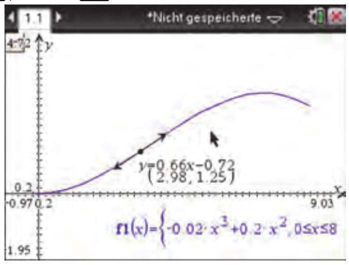
Der Geländewagen kann laut Herstellerangaben eine Steigung von 68 % auf unbefestigten trockenen Wegen überwinden. Das Geländeprofil wird durch die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=-0{,}02\cdot x^3+0{,}2\cdot x^2$ für $0 \leq x \leq 8$ näherungsweise beschrieben (alle Angaben in m).

Entscheiden Sie, ob die beiden mit ihrem Auto steckenbleiben!

Materialbeispiele

- Konstruieren Sie die Tangente an den Graphen im erzeugten Punkt: [menu], 8: *Geometrie*, 1: *Punkte & Geraden*, 7: *Tangente*, bewegen Sie den Cursor zu dem Punkt und [enter], dann [esc].





- Sie können den Punkt jetzt mit [ctrl] [grab] ergreifen und entlang des Graphen bewegen.

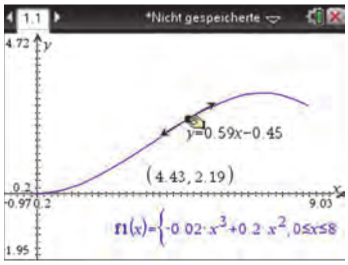
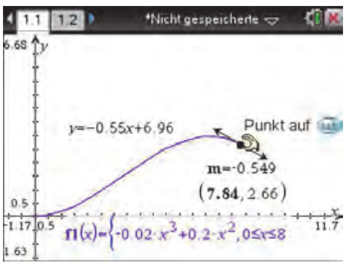
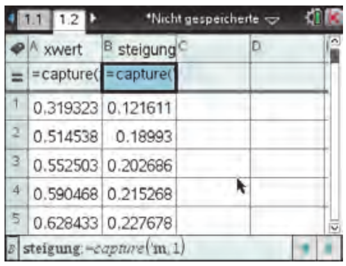


Abbildung 2: Arbeitsblatt M2 ‚Entdeckung der Ableitungsfunktion mithilfe des GTR' (Ausschnitt)

- Blättern Sie nun in Ihrem Dokument mit [ctrl] ◀ zurück auf die *Graphs*-Seite. Ergreifen Sie den Punkt mit [ctrl] [grab] und bewegen ihn vom Anfang bis zum Ende entlang der Kurve. Die Koordinaten werden erfasst und in der Tabelle in *Lists & Spreadsheet* eingefügt.





- Zur Darstellung der erfassten Werte fügen Sie Ihrem Dokument eine neue Seite hinzu: [ctrl] [doc] (+page), 5: *Data & Statistics.* Klicken Sie auf den unteren Rand und dann auf xwert. Am linken Rand klicken Sie dann auf Steigung.

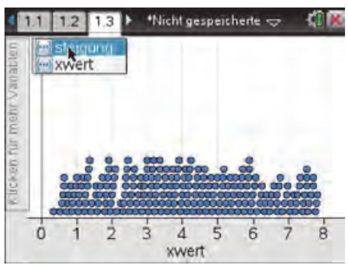
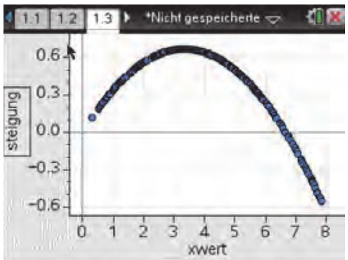
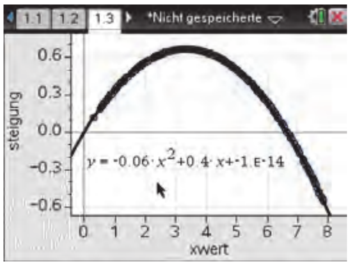


Abbildung 3: Arbeitsblatt M2 ‚Entdeckung der Ableitungsfunktion mithilfe des GTR' (Ausschnitt)

4 Den Term der dargestellten Funktion können Sie mit
[menu], 4: *Analysieren,* 6: *Regression,*
4: *Quadratische Regression anzeigen*
bestimmen lassen.

(Alternativ kann die Regression auch im Menü von *lists & spreadsheet* durchgeführt werden.)





- Der Term der dargestellten Funktion lautet also $h(x) = -0,06x^2 + 0,4x$. Der hinten noch erscheinende Wert beruht auf Rundungsfehlern des Rechners und ist zu vernachlässigen. $(-1,0\text{ E-}14 = -1,0 \cdot 10^{-14} = -0,000\,000\,000\,000\,01)$

Abbildung 4: Arbeitsblatt M2 ‚Entdeckung der Ableitungsfunktion mithilfe des GTR' (Ausschnitt)

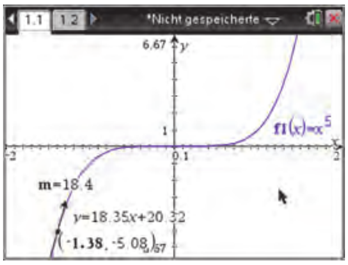
M3 Untersuchung weiterer Funktionen

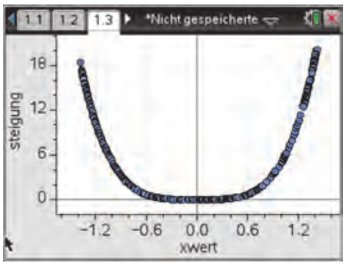
Ermitteln Sie mit dem gleichen Verfahren weitere **„Steigungsfunktionen",** in der Mathematik **Ableitungsfunktionen** genannt, für die folgenden Funktionen.

Entscheiden Sie sich dabei selbstständig für eine geeignete Regression, nachdem Sie den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion betrachtet haben. Wenn eine gewählte Regression nicht gut passt, versuchen Sie es mit einem anderen Funktionstyp z.B. höheren Grades. Beachten Sie die zu vernachlässigenden Rundungsfehler.

1) $g(x) = x^5$

Auswahl einzelner Screenshots:





Die zugehörige Ableitungsfunktion lautet: $g'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Abbildung 5: Arbeitsblatt M3 ‚Untersuchung weiterer Funktionen' (Ausschnitt)

Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen

Als Grundlage dieser Sequenz dient das Vorhaben Q-LK-G2 des schulinternen Lehrplans (QUA-LiS NRW, 2014, S. 71f).

Kurzbeschreibung der Unterrichtssequenz

Ausgehend von der Frage, ob sich zwei Geraden senkrecht schneiden, zeigt das vorliegende Unterrichtsbeispiel einen Weg auf, das Ergebnis des Skalarproduktes zweier Vektoren in diesem Zusammenhang als Entscheidungskriterium zu verwenden.

Kosinussatz

Anschließend wird das Skalarprodukt – unter Ausnutzung des Kosinussatzes – für die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren eingesetzt. Für den GTR wird eine Funktion erstellt, die den Winkel zwischen zwei Vektoren direkt bestimmt.

Der angebotene Kontext nutzt die Tatsache, dass sich die Schülerinnen und Schüler im Vorhinein bereits mit Schnittproblemen von Geraden im Zusammenhang mit Flugbahnen von Flugzeugen intensiv und systematisch auseinandergesetzt haben.

Das Unterrichtsbeispiel kann sowohl im Grundkurs als auch im Leistungskurs eingesetzt werden, im Leistungskurs sollten sich vertiefende Fragestellungen bzgl. der vom vorliegenden Kontext losgelösten geometrischen Interpretation des Skalarproduktes anschließen (z. B. bei der Betrachtung von Projektionen oder im Sachzusammenhang der physikalischen Arbeit).

Prozessorientierte Schwerpunkte

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her. Sie nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen und überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden.

Didaktische Hinweise

Das Inhaltsfeld „Lineare Algebra und Analytische Geometrie“ ist im Mathematikunterricht nicht selten durch aufwendige und fehleranfällige Rechnungen dominiert. Die vorgeschlagene Unterrichtssequenz soll neben der Entwicklung von Rechenverfahren zum Messen (von Längen, Abständen und Winkeln) vor allem die Raumanschauung (Bedeutung der Perspektive), das Koordinatisieren und das Argumentieren fördern.

Raumanschauung

Mit dem Skalarprodukt wird die vektorielle Geometrie, die aus der Einführungsphase bekannt ist und mit der Geraden und Ebenen als Grundfiguren dargestellt werden können, um ein mächtiges Werkzeug zum Messen ergänzt. Für die Charakterisierung von Orthogonalität sowie die Längen- bzw. Abstandsberechnung wird dabei direkt auf den Satz des Pythagoras zurückgegriffen. Bei der Winkelberechnung muss ggf. zunächst der Kosinussatz (als Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras für nicht rechtwinklige Dreiecke) hergeleitet werden.

Insgesamt wird in dieser Unterrichtssequenz intensiv an die ebene Geometrie der Sekundarstufe I angeschlossen. Schülerinnen und Schüler erfahren, dass algebraische Darstellungsformen zur Untersuchung geometrischer Zusammenhänge sinnstiftend genutzt werden können. Sie können dabei die genannten Messverfahren angeleitet herleiten und argumentativ absichern. Die verwendeten Unterrichtsmaterialien ermöglichen dabei eine angemessene Binnendifferenzierung.

Die ersten Erkundungen in dieser Unterrichtssequenz gehen der Frage nach, wie überprüft werden kann, ob zwei Vektoren orthogonal zueinander sind. Erst nach der rechnerischen Charakterisierung, bei der der Satz des Pythagoras zur Anwendung kommt, wird das Skalarprodukt als neue Verknüpfung zwischen zwei Vektoren eingeführt, die nun bereits eine anschauliche und inhaltliche Bedeutung hat. Anschließend wird das Skalarprodukt teilweise losgelöst vom ursprünglichen Kontext weiter untersucht.

Die Unterrichtssequenz wurde mehrfach im Unterricht, sowohl im Grundkurs wie auch im Leistungskurs, umgesetzt. Es eröffnet sowohl vom motivierenden, anschaulichen Kontext als auch von der variantenreichen Methodik her den Schülerinnen und Schülern zahlreiche Lernmöglichkeiten in den angesprochenen Kompetenzbereichen.

Einordnung in die Reihenplanung

Vor dieser Unterrichtssequenz sollte man sich im Unterricht typischerweise mit Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen beschäftigt haben.

UE	*Sequenz*	*Material*	*Mögliche Arbeitsform*	*Zeit (min)*
1	Ein Zeichen für Ned Flanders	M1	Einzelarbeit / Partnerarbeit	67,5
2	Orthogonale Vektoren	M2	Partnerarbeit	67,5
3	Beweisführung zur Orthogonalität	M3	Gruppenarbeit	67,5
4	Winkelberechnungen	M4	Partnerarbeit	67,5

Die einführende Problemstellung

Abbildung 6: Das göttliche Zeichen

Das göttliche Zeichen

Ned Flanders: Hadelidaddeliduddeli. Es ist ein Zeichen. Zwei göttliche Strahlen, die sich genau im rechten Winkel über unserer Kirche schneiden.

Reverend Lovejoy: So ein Quatsch, Ned. Erstens sind das Kondensstreifen von Flugzeugen und zweitens kann man von hier unten gar nichts über den Winkel sagen …

Ned Flanders: Sie zweifeln am göttlichen Zeichen, Reverend.

Reverend Lovejoy: Nein, Ned, nur an dir ...

Ned Flanders: Ich beweise Ihnen, dass ich Recht habe. Hadelidaddeliduddeli.

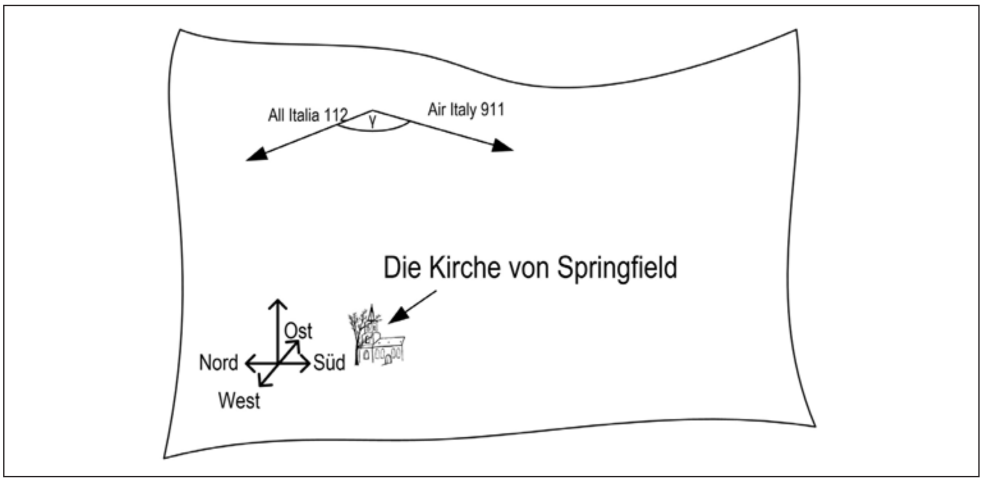


Abbildung 7: Karte von Springfield

Als Ned Flanders mit der Flugaufsicht von Springfield telefoniert, kann man ihm tatsächlich Informationen über zwei Flugzeuge liefern (Abbildung 6 und 7):
Flug *Allitalia 112* befand sich genau um 15:15 h in einer Höhe von 4 km über Springfields Kirche. Flug *Allitalia 112* flog zu diesem Zeitpunkt pro Minute 4 km in westliche, 2 km in nördliche Richtung und stieg um 0,5 km.

Und auch Flug *Air Italy 911* war genau über die Kirche hinweg geflogen und das ebenfalls in einer Höhe von 4 km, allerdings 5 Minuten, nachdem Flug *Allitalia 112* über die Kirche geflogen war. Flug *Air Italy 911* legte zu diesem Zeitpunkt pro Minute 3 km in westliche, 3 km in südliche Richtung zurück und stieg um 0,5 km.

Ned denkt bei sich: Hadelidaddeliduddeli. Damit haben sich die Flugbahnen der Flugzeuge genau über meiner Kirche gekreuzt. Bleibt nur noch zu zeigen, dass es im rechten Winkel war! Hadelidaddeliduddeli!

Ned überlegt, was er tun kann: Zunächst wird er es allein versuchen. Wenn er jedoch alleine nicht mehr weiterkommen sollte, könnte er zunächst den Grundschulrektor Skinner bitten, ihm bei seinem mathematischen Problem zu helfen.

Und falls ihn dies immer noch nicht zum Ziel bringen sollte, wäre da noch Lisa Simpson. Auch diese hätte im Notfall sicher einen Tipp für ihn (Abbildung 8, 9 und 10).

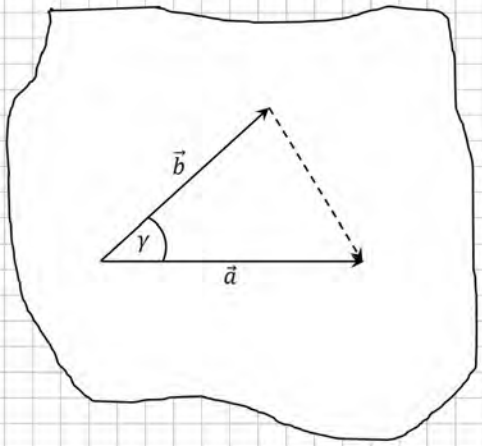
Materialbeispiele

<u>REKTOR SKINNER</u>

REKTOR SKINNER: Nun, Ned, Sie wollen also den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen.

NED: So ist es.

REKTOR SKINNER: Nun, wie das geht, weiß ich auch nicht. Aber ich zeichne immer Dreiecke, wenn ich ein Problem habe, das ich nicht lösen kann. In einem Dreieck erscheint auf einmal alles so einfach...



<u>LISA SIMPSON</u>

LISA SIMPSON: Mmmmh, ein Dreieck, Vektoren, Winkel. Das erinnert mich an die erste Klasse ...

NED: Lisa, kannst du mir nun helfen oder nicht?

LISA SIMPSON: Ach, wissen Sie Mr. Flanders, interessant ist doch eigentlich nur, dass der Vektor $\vec{c}$ der Verbindungsvektor von $\vec{b}$ nach $\vec{a}$ ist.

NED: Du willst also sagen ...

LISA SIMPSON: Um es mit ihren Worten zu sagen: Pythagorididdelidulleli ...

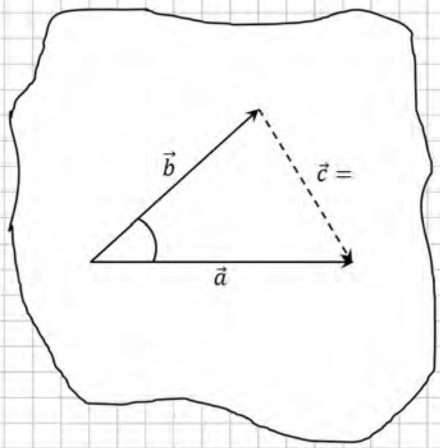


Abbildung 8: Arbeitsblatt 1 ‚Winkel zwischen Vektoren' (Hilfekarten)

<u>Aufgabe:</u>

1. Finden Sie zu jedem Vektor mindestens zwei orthogonale Vektoren. Lesen Sie die Koordinaten dieser orthogonalen Vektoren ab.
2. Untersuche Sie sowohl die vorgegebenen, als auch die von Ihnen gefundenen Vektoren. Beschreiben Sie die Zusammenhänge und versuchen Sie eine Regel zu verfassen, wann Vektoren senkrecht zueinander sind.
3. Erstellen Sie weitere Vektoren und überprüfen Sie Ihre vermutete Regel.

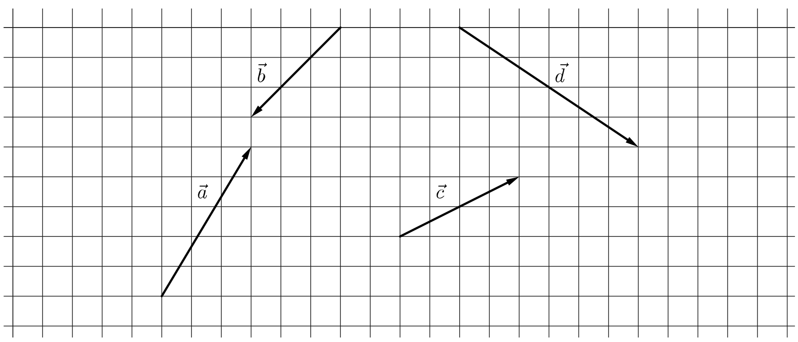


Abbildung 9: Arbeitsblatt ‚orthogonale Vektoren'

Arbeitsblatt 3 (Beweiskarten)

Die Beweisschritte werden in einzelne Schnipsel zerschnitten und zunächst nur zum Teil zur Verfügung gestellt. Je nach Leistungsstärke erhalten die Schülerinnen und Schüler zunächst nur grüne oder nur grüne und gelbe Schnipsel.
Kommen die Schülerinnen und Schüler nicht weiter, können sie sich weitere Beweisschnipsel nehmen. Leistungsstärkere führen den Beweis selbstständig und Leistungsschwächere können ihn nachvollziehen.

1	$\lvert\vec{a}\rvert^2+\lvert\vec{b}\rvert^2$	=	$\lvert\vec{b}-\vec{a}\rvert^2$
2	$\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right)^2+\left(\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\right)^2$	=	$\lvert\vec{b}-\vec{a}\rvert^2$
3	$a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2$	=	$\left(\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}\right)^2$
4	$a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2$	=	$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$
5	$a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2$	=	$b_1^2-2\cdot b_1a_1+a_1^2+b_2^2-2\cdot b_2a_2+a_2^2+b_3^2-2\cdot b_3a_3+a_3^2$
6	$\cancel{a_1^2}+\cancel{a_2^2}+\cancel{a_3^2}+\cancel{b_1^2}+\cancel{b_2^2}+\cancel{b_3^2}$	=	$\cancel{b_1^2}-2\cdot b_1a_1+\cancel{a_1^2}+\cancel{b_2^2}-2\cdot b_2a_2+\cancel{a_2^2}+\cancel{b_3^2}-2\cdot b_3a_3+\cancel{a_3^2}$
7	0	=	$-2\cdot b_1a_1-2\cdot b_2a_2-2\cdot b_3a_3$
8	0	=	$-2\cdot(b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3)$
9	0	=	$b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3$

Abbildung 10: Arbeitsblatt ‚Skalarprodukt'

Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen

Als Grundlage dieser Sequenz dient das Vorhaben Q-LK-G2 des schulinternen Lehrplans (QUA-LiS NRW, 2014, S. 82).

Kurzbeschreibung der Unterrichtssequenz

Die Unterrichtssequenz beschreibt eine Möglichkeit an einem realitätsbezogenen Kontext die Kenngrößen der Statistik (Mittelwert, empirische Standardabweichung) und Wahrscheinlichkeit (Erwartungswert, Standardabweichung) zu erarbeiten und in die Thematik der Binomialverteilung einzusteigen. Die erste Unterrichtseinheit (Kenngrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilung) ist für mindestens fünf Unterrichtsstunden zu je 45 Minuten ausgelegt. Es sollte sich nach dem Bedarf des Kurses eine weitere Übungsstunde anschließen. Die zweite Unterrichtseinheit (Binomialverteilung) ist für mindestens vier Doppelstunden von jeweils 90 Minuten geplant.

GTR-Funktionen

In den vorgestellten Unterrichtseinheiten wird der GTR genutzt. Dabei sollten in der ersten Unterrichtseinheit Mittelwert/Erwartungswert/(empirische) Standardabweichung zunächst händisch berechnet werden, bevor an geeigneten Stellen die entsprechenden GTR-Funktionen erläutert und eingesetzt werden. Alternativ kann auch ein Tabellenkalkulationsprogramm verwendet werden. In der zweiten Unterrichtseinheit findet der GTR durchgehend Verwendung.

Prozessorientierte Schwerpunkte

Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners (GTR)

Der Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners entfaltet an dieser Stelle seine Wirkung als ‚Tabellenkalkulator' zur Verarbeitung größerer Datenmengen, was auf der einen Seite von den Schülerinnen und Schülern als entlastend wahrgenommen werden kann, auf der anderen Seite zusätzlich eine Kompetenzerweiterung im Umgang mit Datensätzen darstellt, im Idealfall als Vertiefung der bereits in der Sekundarstufe I erworbenen Werkzeugkompetenz.

Modellieren

Der Kontext bietet eine Möglichkeit, eine reale Situation sinnstiftend zu modellieren. Dabei steht besonders die Erarbeitung einer Lösung innerhalb des mathematischen Modells im Zentrum, wobei die Notwendigkeit entsteht, Fachbegriffe (Erwartungswert, Standardabweichung) und mathematische Konventionen einzuführen und zu verwenden.

Didaktische Hinweise

Diese Unterrichtssequenz orientiert sich an der Absicht, Konzepte der Stochastik aus lebensweltlich relevanten Fragestellungen zu entwickeln. Damit sollen die Schülerinnen und Schüler vor allem dazu befähigt werden, die erlernten Konzepte flexibel in unterschiedlichen Situationen anzuwenden. Auch für die Einführung von Kenngrößen von Zufallsvariablen und der Binomialverteilung wird der für Oberstufenschülerinnen und -schüler relevante Kontext „Straßenverkehr" genutzt. Durch die Verknüpfung von realem Kontext und mathematischer Darstellung können die stochastischen Fachbegriffe besonders gut illustriert werden, um auf Grundlage der bereits in der Einführungsphase erarbeiteten Konzepte Grundvorstellungen von Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und den

Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung weiter auszudifferenzieren.

Zwar setzt diese Unterrichtssequenz voraus, dass die Schülerinnen und Schüler bereits Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen kennengelernt haben, es sollte aber dennoch berücksichtigt werden, dass das Konzept der Zufallsgröße recht abstrakt ist. Letztlich handelt es sich um eine Funktion, die Elementen der Ergebnismenge reelle Zahlen zuordnet. Derartige mathematische Objekte sind in der Regel zuvor nicht explizit betrachtet worden. Schwierigkeiten, die Schülerinnen und Schüler im Zusammenhang mit dem hier vorgeschlagenen Unterrichtsgang haben, können also eher durch das vorausgesetzte Konzept der Zufallsgröße begründet sein. In diesem Fall ist eine Wiederholung und Vertiefung im Kontext der aktuellen Aufgaben empfehlenswert. Der unvollständig ausgearbeitete Begriff kann durch das gut erfassbare Beispiel an dieser Stelle ausgeschärft werden.

Bei der Entwicklung der Kenngrößen von Zufallsgrößen (Erwartungswert und Standardabweichung) kann konsequent auf Vorerfahrungen aus der beschreibenden Statistik (arithmetisches Mittel und empirische Standardabweichung) zurückgegriffen werden; die entsprechenden Konzepte werden nun wahrscheinlichkeitstheoretisch gedacht und entwickelt. Dabei ist es relevant, dass der prinzipielle Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten noch einmal reflektiert wird, da er in einer späteren Unterrichtssequenz zur beurteilenden Statistik eine wesentliche Rolle spielt.

Beurteilende Statistik

Eine weitere wichtige Perspektive bei dieser Unterrichtssequenz ist die der Variabilität in Verteilungen. So wie es bei Datenreihen nicht genügt, sich nur das arithmetische Mittel anzuschauen, ist es bei Zufallsgrößen zu kurz gedacht, wenn man ihre Verteilung nur mit dem Erwartungswert charakterisieren möchte. Zwei Verteilungen mit gleichem Erwartungswert können sehr unterschiedliche Gestalt haben, was sich häufig bereits an der Standardabweichung ablesen lässt. Insgesamt können Kenngrößen aber immer nur einen reduzierten Eindruck von Datenreihen bzw. Verteilungen ermöglichen.

Bei der Einführung und bei Anwendungen der Binomialverteilung sollte schließlich immer reflektiert werden, inwieweit die angenommene stochastische Unabhängigkeit (von Durchführung zu Durchführung des zugrunde liegenden Bernoulli-Experiments) der Situation angemessen ist. Bei vielen Anwendungen wird stochastische Unabhängigkeit angenommen, obwohl sie sich inhaltlich kaum begründen lässt.

Einordnung in die Reihenplanung

Die Kenntnis der Begriffe der *Wahrscheinlichkeitsverteilung* und der *Zufallsgröße* wird vorausgesetzt. Es empfiehlt sich eine Unterrichtssequenz vorzuschalten, in der diese Begriffe intensiv behandelt werden. Anbieten würde sich zum Beispiel die Betrachtung der Augensumme beim Wurf mit zwei Würfeln.

UE	*Sequenz*	*Material*	*Mögliche Arbeitsform*	*Zeit*
1	Wiederholung der Grundbegriffe der Statistik	M1	Einzelarbeit / Partnerarbeit / Plenum	45
2	Einführen der empirischen Standardabweichung	M2.1 M2.2 Übungsaufgaben aus eingeführtem Schulbuch	Einzelarbeit / Partnerarbeit / Plenum	90–135
3	Einführung der Standardabweichung und des Erwartungswertes	M3	Einzelarbeit / Partnerarbeit / Plenum	45
4	Übungseinheit zur Vertiefung der erlangten Kompetenzen	Übungsaufgaben aus eingeführtem Schulbuch		45

UE	*Sequenz*	*Material*	*Mögliche Arbeitsform*	*Zeit*
1	Einstieg in die Binomialverteilung	M4	Einzelarbeit / Partnerarbeit / Plenum	90
2	Übungseinheit zur Vertiefung der erlangten Kompetenzen	Übungsaufgaben aus eingeführtem Schulbuch		45–90
3	Erwartungswert, Standardabweichung und Varianz der Binomialverteilung	M5	Einzelarbeit / Partnerarbeit / Plenum	90
4	Übungseinheit zur Vertiefung der erlangten Kompetenzen	Übungsaufgaben aus eingeführtem Schulbuch		45–90

Die einführende Problemstellung

Streit um Raserei

Gleisheim. In den vergangenen Jahren ist oft Ärger über die Raser auf dem Stadtring laut geworden. Daher hat die Polizei am 28. Februar ihren Radarwagen dort aufgestellt und innerhalb einer halben Stunde die Geschwindigkeiten gemessen.

„Mehrheitlich halten sich die Verkehrsteilnehmer an die Verkehrsregeln!“, unterstreicht der bei einem Gespräch anwesende Vertreter der Stadt. Ein Sprecher der Anwohner äußert hingegen sofort Widerspruch mit seiner Überzeugung: „Die gefahrene Geschwindigkeit ist durchschnittlich zu hoch!“

Laut wurde es, als ein Autofahrer aus dem Publikum sich zu Wort meldete und schimpfte: „Wegen eines Rasers werden alle über einen Kamm geschoren! Abgesehen von diesem Spinner sind wir doch durchschnittlich nicht zu schnell gewesen!“ Hier widersprach ein Vertreter der Polizei. Er wies darauf hin, dass es zwei Fahrer waren, die wegen Geschwindigkeitsüberschreitung erwischt wurden.

Abbildung 11: Geschwindigkeitsbeschränkung

Die Ergebnisse der Messungen										
Uhrzeit	08:02	08:05	08:15	08:15	08:16	08:16	08:17	08:17	08:18	08:19
Geschwindigkeit (in km/h)	49	50	90	49	48	50	51	49	50	48
Uhrzeit	08:21	08:23	08:23	08:24	08:25	08:27	08:29	08:30	08:30	08:31
Geschwindigkeit (in km/h)	54	52	51	48	51	48	50	52	49	50

Information
Bei stationären Blitzern werden 3 km/h Toleranz bei Messungen unter 100 km/h abgezogen, bei allen Messungen über 100 km/h kommen 3 % der gemessenen Geschwindigkeit zum Abzug.

Aufgabe
Für alle Aussagen lassen sich Belege in den Zahlen finden. Unterstützen Sie jede der getroffenen Aussagen mit jeweils einem mathematischen Argument.

Materialbeispiele

Zum Einsatz von M2
Anhand der Thematik „Richtgeschwindigkeit auf deutschen Autobahnen" sollen die Schülerinnen und Schüler mithilfe eines Datensatzes schrittweise an die Berechnung der empirischen Standardabweichung herangeführt werden.

Standardabweichung

Die Erarbeitung erfolgt anhand zweier Messreihen, von denen die erste eine wesentlich geringere Streuung aufweist als die zweite.[5] Dies ermöglicht die Interpretation der berechneten Werte für die Standardabweichung und Varianz. Es bietet sich die Methode des Partnerpuzzles mit anschließender Diskussion im Plenum an.

Diskussion im Plenum unter Berücksichtigung folgender Fragestellungen:
- Diskussion, warum der Mittelwert von $x_i - \bar{x} = 0$ ist
- Notwendigkeit des Quadrierens von $x_i - \bar{x}$ (Berücksichtigung der Ausreißer)
- Herleitung der Formel zur Berechnung der empirischen Standardabweichung mithilfe der absoluten Häufigkeit $[s = \sqrt{\frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2)}]$
- Berechnung der empirischen Standardabweichung für den gegebenen Datensatz
- Vergleich der linearen Abweichung mit der empirischen Standardabweichung (Gewichtung der Ausreißer)
- Interpretation der Standardabweichung und Varianz durch Vergleich der Werte für beide Datenreihen (Alltagssituation zu den gegebenen Messreihen finden)

5 Exemplarisch wird hier nur die erste dieser Messreihen dargestellt.

M2.1

Richtgeschwindigkeit auf deutschen Autobahnen

Die Richtgeschwindigkeit auf deutschen Autobahnen beträgt 130 km/h. Höhere Geschwindigkeiten führen häufiger zu erhöhtem Unfallrisiko.

Somit ergibt sich die Fragestellung, wie sehr sich die Autofahrer auf deutschen Autobahnen an diese Richtgeschwindigkeit halten.

Beispielhaft soll dieser Frage mit folgenden 10 Messwerten auf den Grund gegangen werden.

a) Füllen Sie die gegebene Tabelle spaltenweise aus.

i	x_i	$x_i-\bar{x}$	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$(x_i-\bar{x})^2$
1	125			
2	132			
3	157			
4	70			
5	180			
6	113			
7	115			
8	140			
9	148			
10	190			
Mittel-tel-werte	Arithmetisches Mittel $\bar{x}=\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ =	Mittlere Differenz $\overline{\Delta x}=\frac{(x_1-\bar{x})+\dots+(x_n-\bar{x})}{n}$ =	Mittlere lineare Abweichung $\bar{d}=\frac{\lvert x_1-\bar{x}\rvert+\dots+\lvert x_n-\bar{x}\rvert}{n}$ =	Varianz $\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$ =

b) Berechnen Sie jetzt die lineare Abweichung und die empirische Standardabweichung der gemessenen Geschwindigkeiten vom Stadtring.

Uhrzeit	08:02	08:05	08:15	08:15	08:16	08:16	08:17	08:17	08:18	08:19
Geschwindigkeit in km/h	49	50	90	49	48	50	51	49	50	48

Uhrzeit	08:21	08:23	08:23	08:24	08:25	08:27	08:29	08:30	08:30	08:31
Geschwindigkeit in km/h	54	52	51	48	51	48	50	52	49	50

c) Berechnen Sie die lineare Abweichung und die empirische Standardabweichung aus b) ohne Berücksichtigung des Ausreißers. Was fällt Ihnen auf?

Abbildung 12: Arbeitsblatt ‚Richtgeschwindigkeit' (M2.1)

Hinweise zum Material M3

In der dritten Unterrichtssequenz sollen die Schülerinnen und Schüler in einer reinen Transferaufgabe „Der Blitzmarathon" das arithmetische Mittel und die Standardabweichung mittels gegebener relativer Häufigkeiten berechnen. Hierbei steht vor allem die mathematische Berechnung im Vordergrund, da die Schülerinnen und Schüler eine Standardabweichung nicht isoliert interpretieren können. Im Anschluss an die Bearbeitung der Aufgabe kann eine Diskussion erfolgen, ob die Daten eines Blitzmarathons eine gute Zufallsstichprobe darstellen. Selbst Raser würden an einem solchen Tag bewusst auf ihre Geschwindigkeit achten.

M3

Der Blitzmarathon

Beim Blitzmarathon 2015 wurden von insgesamt 422.000 Autofahrern 11.000 Fahrer geblitzt, was einer Rate von etwa 2,7% entspricht.

Beim Blitzmarathon wurden in den 50er Zonen folgende Daten erhoben:

Geschwindigkeit	35	37	40	43	45	48	49	50	51	52
Relative Häufigkeit	0,005	0,023	0,027	0,059	0,086	0,127	0,165	0,189	0,146	0,093

Geschwindigkeit	53	54	55	56	57	58	59	60	70	80
Relative Häufigkeit	0,053	0,009	0,0055	0,0038	0,003	0,0025	0,002	0,0006	0,0005	0,0001

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel.
b) Berechnen Sie die Standardabweichung.

Abbildung 13: Arbeitsblatt ‚Blitzmarathon' (M3)

M4

Die Wette um Geschwindigkeiten

Bei einer Geschwindigkeitskontrolle in einem verkehrsberuhigten Innenstadtbereich wird von vorbeifahrenden Autos die Geschwindigkeit gemessen. Erfahrungsgemäß halten sich nur etwa 60 % aller Autofahrer in diesem Bereich an die vorgeschriebene Höchstgeschwindigkeit.

Ein Verkehrspolizist, der mit seinem Kollegen die Radarmessung durchführt, sagt zu seinem Kollegen: „Ich wette, dass bei den nächsten drei Autos genau ein Schnellfahrer dabei ist." Der Kollege meint: „Ich wette dagegen."

a) Geben Sie eine Schätzung ab, wer die Wette gewinnt. Begründen Sie.
b) Diskutieren Sie zu zweit Ihre Schätzungen.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Polizist gewinnt.
d) Wie verändert sich der Ausgang der Wette, wenn der erste Polizist wettet, dass:
   i. bei drei Autos <u>mindestens ein</u> Schnellfahrer dabei ist?
   ii. <u>höchstens zwei</u> Schnellfahrer dabei sind?

Abbildung 14: Arbeitsblatt ‚Die Wette' (M4)

M5

Die neue Wette um Geschwindigkeiten

Aufgabe 1
Der Polizist ist mit der letzten Wette unzufrieden. Er will noch einmal wetten und eine größere Anzahl Autos betrachten, zum Beispiel 20, 50 oder sogar 100. Sein Kollege fragt daraufhin: „Und auf wie viele Raser würdest du dann wetten?"

Betrachten Sie mit Hilfe des GTR die Streudiagramme für die entsprechenden Längen der Bernoullikette. Was würden Sie dem Polizisten für seine Wette raten, bei

a) 20,
b) 50,
c) 100 Fahrzeugen?
d) Beurteilen Sie, inwiefern die Anzahl der Fahrzeuge für den Ausgang der Wette eine Rolle spielt.

Aufgabe 2
Beim Blitzmarathon hat sich gezeigt, dass in Gleisheim die Autofahrer in der 50-Zone in der Paradiesstraße mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% mit erhöhter Geschwindigkeit fahren. Weitere auffällige Messstellen waren die 30-Zone in der Quallestraße mit einer Raserwahrscheinlichkeit von 50% und der verkehrsberuhigte Bereich am Bahnhof (p=0,7).

Vergleichen Sie mit Hilfe des GTR Streudiagramme für die drei gegebenen Wahrscheinlichkeiten p.

Abbildung 15: Arbeitsblatt ‚Wette 2' (M5)

Literatur

Gerber, Klaus; Hahnel, Annette; Hanslik, Susanne; Hüllen, Horst; Mühlenfeld, Udo; Sandführ, Stefan & Schmidt, Ursula (2007). Ausgewählte Aufgaben. In Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSW) (Hrsg.), *Impulse für den Mathematikunterricht in der Oberstufe. Konzepte und Materialien aus dem Modellversuch* (Programm Sinus-Transfer, S. 45–227). Stuttgart: Klett.

Hoffert, Uli (2013). Ansätze und Materialien zur Steigerung der Motivation im Mathematikunterricht zu Beginn der Oberstufe. In Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSW) (Hrsg.), *Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht. Materialien und Anregungen zur Unterrichtsentwicklung – Berichte aus den SINUS.NRW-Projekten* (SINUS.NRW, Nr. 9050/1, 1. Aufl., S. 7–29). Handreichung. Düsseldorf.

Hußmann, Stephan; Leuders, Timo & Pallack, Andreas (2007). Impulse zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der gymnasialen Oberstufe. Bausteine für die Unterrichtsentwicklung. In Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSW) (Hrsg.), *Impulse für den Mathematikunterricht in der Oberstufe. Konzepte und Materialien aus dem Modellversuch* (Programm Sinus-Transfer, S. 7–34). Stuttgart: Klett.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2007). *Impulse für den Mathematikunterricht in der Oberstufe. Konzepte und Materialien aus dem Modellversuch* (Programm Sinus-Transfer). Stuttgart: Klett.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2014). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium, Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik* (Die Schule in Nordrhein-Westfalen, Bd. 4720). Düsseldorf: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen.

Projektgruppe

Set-Mitglieder:

Bastian Klappert, Röntgen-Gymnasium Remscheid
Katrin Burgard, Leibniz-Gymnasium Remscheid
Jenny Weihers, Leibniz-Gymnasium Remscheid
Cornelia Nicksch, Sophie Scholl Gesamtschule Remscheid
Olaf Noll, Sophie Scholl Gesamtschule Remscheid
Christian Baart, Gesamtschule Barmen, Wuppertal
Jens Dahmen, Leibnitz-Gymnasium, Dortmund
Nils Hammelrath, Gesamtschule Meiderich Duisburg
Melanie Jankord, Comenius Gymnasium Datteln
Klaus Busse, Gesamtschule Weierheide, Oberhausen
Ulrich Brauner, Willy Brandt Gesamtschule Castrop-Rauxel
Ingo Koschinski, Gesamtschule Greven Greven
Dr. Kay Nüßler, Gesamtschule Holsterhausen Essen

Projektkoordination:

Susann Dreibholz, ZfsL Solingen
Ulrich Hoffert, Gesamtschule Holsterhausen Essen

Wissenschaftliche Begleitung:

Prof. Dr. Andreas Büchter, Universität Duisburg-Essen